MATEMÁTICA PARTE I

Pregunta 01

Las notas obtenidas por tres postulantes hacen un promedio de 15. La relación entre las notas del primero y el segundo es 4/5 y la relación entre el segundo y tercero es 5/6. Calcule la diferencia entre la mayor y menor nota.

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

Resolución 01

Promedios

Las notas están en relación de:

A= 4k

B= 5k

C= 6k

Como el promedio de las 3 notas es 15, entonces la suma de estas es 45:

$4k+5k+6k= 45 \rightarrow k= 3$

$\therefore$ A= 4(3)= 12; B= 5(3)= 15; C= 6(3)= 18

Piden: C – A= 6

Rpta.: 6

Pregunta 02

Si se cumple que $\overline{abc}= \overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$, calcule el valor de a+b–c, sabiendo que a, b, c son positivos.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución 02

Cuatro operaciones

$\overline{abc}= \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$

$\overline{a00}= \overline{ab} + \overline{ca}$

Por criptoaritmética

$$\begin{array}{r} \overline{ab} + \\ \overline{ca} \\ \hline \overline{a00} \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=9 \\ c=8 \end{array}\right\} a+b-c=2$$

Rpta.: 2

Pregunta 03

Una persona dispone de cierto capital, el cual es dividido en dos partes. La mayor parte la impone al 14% anual y la otra parte al 8% semestral. Si al cabo de un año los montos obtenidos son iguales, determine el capital inicial, sabiendo que las partes se diferencian en 1200. Todas las cantidades están en nuevos soles.

A) 128 000

B) 132 000

C) 136 000

D) 138 000

E) 140 000

Resolución 03

Interés simple

C: Capital

C_1 — 14% anual

C_2 — 16% anual

Al cabo de un año se obtienen montos iguales.

$$M_1 = M_2$$

$$114\%\, C_1 = 116\% C_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{58}{57} \qquad \begin{array}{l} C_1 = 58\,k \\ C_2 = 57\,k \end{array}$$

$$C_1 - C_2 = 1200 \rightarrow k = 1200$$

$$\therefore\ C_1 + C_2 = 115k = 138\,000$$

Rpta.: 138 000

Pregunta 04

Si una cadena de 16 kilates cuyo peso de metal ordinario es 32 gramos se funde con un lingote de oro de 104 gramos con ley 0,65. De cuántos kilates es la aleación obtenida.

A) 0,651

B) 0,658

C) 15,600

D) 15,792

E) 34,442

Resolución 04

Mezcla

Primera aleación

$$\text{Ley} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Liga}} w = 32\text{g de metal ordinario}$$

$$w = 96\text{g}$$

Segunda aleación

Ley= 0,65 y w= 104 gr

La ley de la unión de estas aleaciones

$$L_m = \frac{\frac{2}{3}(96) + 0,65(104)}{96+104} = \frac{131,6}{200}$$

$$L_m = 0,658$$

La ley en kilates sería:

(0,658)24=15,792 kilates

Rpta.: 15,792

Pregunta 05

Un comerciante tiene que formar paquetes diferentes de 8 unidades de frutas, para ello debe escoger entre plátanos y peras. Cada plátano cuesta S/. 0,20 y cada pera S/. 0,50. ¿Cuál es el promedio de la venta de los paquetes?

Asúmase que hay suficientes plátanos y peras.

A) 2,77

B) 2,79

C) 2,80

D) 3,00

E) 3,10

Resolución 05

Promedios

Total de frutas: 8

	N. Plátanos (x)	N. Peras (8–x)
Precio de c/u	S/. 0,20	S/. 0,50

- Para

$x= 0; 1; 2; ...; 8$

$\Rightarrow \overline{x}= 4$

$Pv= 0,20(x) + 0,50(8–x)$

$\overline{Pv}= 0,20(\overline{x}) + 0,50(8–\overline{x})$

$\overline{Pv}= 0,20(4) + 0,50(8–4)$

$\overline{Pv}= 2,80$

> $\overline{Pv}$: *precio de venta promedio*
> $\overline{x}$: *promedio de los x (x= 0, 1, 2, ..., 8)*

Rpta.: 2,80

Pregunta 06

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado; donde P indica la probabilidad.

I. Si los conjuntos no vacíos A y B son disjuntos, entonces

$P(A\cup B)= P(A)+P(B)–P(A)P(B)$

II. Sean

$A= \{(x,y)/x\in\{1,2,3,4,5,6\}; y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$

$B= \{(x,y)\in A / 4<x+y\leq 6\}$

entonces $P(B)= \dfrac{2}{9}$

III. $P(E\Delta D)= P(E\cap D^c)+P(E^c\cap D)$

A) VVV

B) VFV

C) FVF

D) FFV

E) FFF

Resolución 06

Probabilidades

I. Si A y B son disjuntos $\Rightarrow A\cap B= \varnothing$

$\Rightarrow P_{(A\cap B)}= 0$

Como: $P_{(A\cup B)}= P_{(A)}+P_{(B)}–P_{(A\cap B)}$

$\therefore P_{(A\cup B)}= P_{(A)}+P_{(B)}$

II. Como:

$n(A)= 6\times 6= 36$

$B= \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2); (1,5); (5,1); (3,3); (2,4); (4,2)\}$

$n(B)= 9$

Además $B\subset A$

$$P_{(B/A)}= \frac{9}{36}= \frac{1}{4}$$

III. Recordar

- $E\Delta D= (E\cap D^c)\cup(E^c\cap D)$
- $(E\cap D^c)\cap(E^c\cap D)= \varnothing$
- $P_{(A\cup B)}= P_{(A)}+P_{(B)}–P_{(A\cap B)}$

Entonces

$$P_{(E\Delta D)}= P_{(E\cap D^c)}+P_{(E^c\cap D)}–\underbrace{P_{(\varnothing)}}_{0}$$

$$P_{(E\Delta D)}= P_{(E\cap D^c)}+P_{(E^c\cap D)}$$

Luego:

I= F II= F III= V

Rpta.: F F V

Pregunta 07

Dados $\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}+2$, $\overline{dabc}=\overset{\circ}{9}+2=\overset{\circ}{11}+7$, donde $\overline{dabc}$ es el menor número con las propiedades indicadas con $d\neq 0$ y $a\neq 0$.

Determine el valor de $E=(a)(b)+(c)(d)$

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18
F)

Resolución 07

Teoría de números

$\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}+2$ ....(1)

$\overline{dabc}=\overset{\circ}{9}+2$ ....(2)

$\overline{dabc}=\overset{\circ}{11}+7$ ...(3)

de (1): $d=2$ o 7 elegiremos $d=2$

de (2) y (3): $\overline{dabc}=\overset{\circ}{99}+29 \Rightarrow \overline{da}+\overline{bc}=29$

como $\overline{dabc}$ es el menor posible:

$\overline{2a}+\overline{bc}=29 \Rightarrow b=0 \Rightarrow b=0 \wedge \underset{\substack{\downarrow\\1}}{a}+\underset{\substack{\downarrow\\8}}{c}=9$

Recuerde que $a\neq 0$

pero b si puede ser cero

$\overline{dabc}=2108$

$\therefore E=(a)(b)+(c)(d)=16$
$\quad 1\times 0+8\times 2$

Rpta.: 16

Pregunta 08

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado:

I. $\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+...=0$

II. Cada número irracional se puede aproximar por un número racional.

III. Si $A=\langle 0,1\rangle\cap Q^c$, entonces $\frac{1}{2}\in A$, donde Q^c indica el complemento del conjunto de los números racionales.

A) VVV
B) VVF
C) FVV
D) FVF
E) FFF

Resolución 08

Conjuntos numéricos

I. Sea $f_n=\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+...}_{\text{"n" términos}}$

Luego:

$f_1=\sqrt{2}$; $f_2=0$; $f_3=\sqrt{2}$; $f_4=0$; ...

La sucesión de las sumas parciales es oscilante, por tanto, cuando "n" tiende a infinito

Lim fn= No está definida
$n\to\infty$

II. Para todo "x" irracional, existe un "n" entero tal que

$n<x<n+1$

Dividiendo entre un $m\in Q^+$

$\frac{n}{m}<\frac{x}{m}<\frac{n+1}{m}$

Donde $\frac{x}{m}$ es un irracional y su aproximación por defecto es el racional $\frac{n}{m}$

III. Si $\frac{1}{2} \in A \rightarrow \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \in \langle 0;1\rangle}_{V} \wedge \underbrace{\frac{1}{2} \in Q^c}_{F}}_{F}$

Rpta.: F V F

Pregunta 09

Si x_0 es la solución de la ecuación

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

Calcular el valor de $\sqrt{x_0+34}$

A) 5
B) 10
C) 15
D) 20
E) 25

Resolución 09

Racionalización

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{8}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}^{\,2}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+7=\sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

$$8+\sqrt{2}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

$$\sqrt{64}+\sqrt{2}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

Se cumple que:

$x=64+2=66$

$\therefore \sqrt{x+34}=10$

Rpta.: 10

Pregunta 10

Determine la intersección de los conjuntos de las inecuaciones siguientes:

$$\frac{(x+3)^5(x+1)^8}{(x-1)^7(x-2)^4}\leq 0,$$

$$\frac{\sqrt[7]{x+2}\,.\,\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-5}\;\sqrt[6]{6-x}}\leq 0.$$

A) $[-3,1\rangle$
B) $[-1,6\rangle$
C) $[-1,5\rangle$
D) $[-1,1\rangle$
E) $[-3,5\rangle$

Resolución 10

Inecuaciones

I. $$\frac{(x+3)^5\cancel{(x+1)^8}}{(x-1)^7\cancel{(x-2)^4}}\leq 0$$

$-3\leq x<1 \wedge \{x\neq 2;\ x=-1\}$

$CS(I)=[-3,1\rangle$

II. $$\frac{\sqrt[7]{x+2}\,.\,\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-5}\,.\,\sqrt[6]{6-x}}\leq 0$$

$-1\leq x<6 \wedge \frac{x+2}{x-5}\leq 0$

$-1\leq x<6 \wedge -2\leq x<5$

$CS(II)= [-1,5\rangle$

$\therefore\ CS(I) \cap CS(II)= [-1,1\rangle$

Rpta: $[-1,1\rangle$

Pregunta 11

Sea f una función definida por $f(x)= (1-x^3)^{1/3}+1,\ x\in\mathbb{R}$. Determine la inversa f * de f.

A) $f^*(x)=1-(x^2-1)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$
B) $f^*(x)=1-(x-1)^{3/2},\ x\in[0,+\infty>$
C) $f^*(x)=(1-x^3)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$
D) $f^*(x)=(1-(x-1)^3)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$
E) $f^*(x)=(1-(x-1)^{1/3})^3,\ x\in[0,+\infty>$

Resolución 11

Funciones

I. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}+1;\ x\in R$

II. Nótese que f es inyectiva con dominio R y rango R.

Obtención de la inversa:

$y=\sqrt[3]{1-x^3}+1$

$y-1=\sqrt[3]{1-x^3}$

$(y-1)^3= 1-x^3$

$x^3= 1-(y-1)^3$

$x=\sqrt[3]{1-(y-1)^3}$

Rpta.: $f^*(x)=(1-(x-1)^3)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$

Pregunta 12

Considere: $S_n= i+i^2+i^3+\ldots i^n$, donde $i^2= -1$, con $n\in\mathbb{N}$. Dadas las siguientes proposiciones.

I. $S_n+S_{n+1}= i$, si n es impar.
II. $S_n= S_{n-1}+S_{n+1}$, si n es par.
III. $S_n= -1$, si n tiene la forma $n= 4k+3$, con k entero no negativo.

Son correctas:

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

Resolución 12

Números complejos

$S_n = i + i^2+i^3+ \ldots + i^n$

$$\Longrightarrow S_n=\frac{i(i^n-1)}{i-1}=\frac{-i\cdot i(i^n-1)}{-i(i-1)}$$

$$Sn=\frac{i^n-1}{i+1}$$

I. $\underbrace{S_n}_{} + \underbrace{S_{n+1}}_{} = i$

$$\frac{i^n-1}{i+1}+\frac{i^{n+1}-1}{i+1}=i$$

$i^n + i^{n+1} - 2 = i(i+1)$

$i^n(1+i) = -1 + i + 2$

$i^n\,(1+i) = (1+i)$

$i^n = 1$

$n = 4k$ (F)

II. $\underbrace{S_n} = \underbrace{S_{n-1}} + \underbrace{S_{n+1}}$

$\dfrac{i^n-1}{i+1} = \dfrac{i^{n-1}-1}{i+1} + \dfrac{i^{n+1}}{i+1}$

$i^n - 1 = \underbrace{i^{n-1} + i^{n+1}} - 2$

$i^n - 1 = 0 - 2$

$i^n = -1$

$\Longrightarrow n \in 4k+2$ (F)

III. $\underbrace{S_n} = -1$

$\dfrac{i^n-1}{i+1} = -1$

$i^n - 1 = -i - 1$

$i^n = -1 \Rightarrow n \in 4k + 3$ (V)

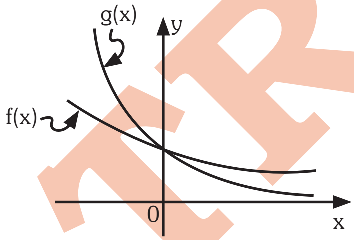
Rpta.: Solo III

Pregunta 13

Sean las funciones:

$f(x) = c(a^x)$ y $g(x) = d(b^x)$

cuyas gráficas se muestran a continuación.



Indique cuál(es) de las siguientes proposiciones son correctas.

I. $c = d$

II. $0<a<b<1$

III. $a+b>1$

A) Solo I

B) Solo II

C) I y II

D) I y III

E) II y III

Resolución 13

Funciones

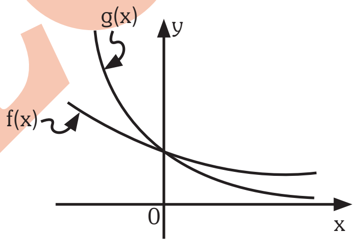
$f(x) = ca^x$; $g(x) = db^x \Rightarrow$ Por teoría: $a>0$; $b>0$

$\therefore$ I) V

II) F

III) F

Observamos en la gráfica:



i) $f(x)>0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c>0$

$g(x)>0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow d>0$

ii) $f(0)=g(0) \Rightarrow c=d$

iii) $f(x)>g(x)\ \forall x>0$

$\cancel{c}a^x > \cancel{c}b^x;\ \forall x>0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1;\ \forall x>0 \Rightarrow \frac{a}{b}>1$

$\Rightarrow a>b \Rightarrow 0<b<a<1$

Rpta.: Solo I

Pregunta 14

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}$. Si $AX=A^T$; halle $\frac{2}{3}X^T$.

A) $\begin{bmatrix}4/3&-2/3\\2&-2/3\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}4/3&4/3\\-2&-2/3\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}4/3&-2/3\\1&-1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1&1/3\\2/3&-1/3\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}2/3&-2/3\\1&-1\end{bmatrix}$

Resolución 14

Matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$$

En la ecuación:

$$AX=A^T$$
$$X=A^{-1}.A^T$$
$$X=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$
$$X=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$
$$X^T=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}$$
$$\therefore \frac{2}{3}X^T=\begin{pmatrix}4/3&-2/3\\2&-2/3\end{pmatrix}$$

Rpta.: $\begin{pmatrix}4/3&-2/3\\2&-2/3\end{pmatrix}$

Pregunta 15

Sea X una matriz de orden 2×2 que cumple con:

$(AX\,A^{-1})^t=3(A-I)$, donde $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

a, b, c, d $\in\mathbb{R}$, I matriz identidad.

Si la traza de X es -6. Calcule $(a+d)(b+c)$.

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución 15

Matrices

Se tiene: $Ax\,A^{-1}=(3(A-I))^T$

$\text{traz}\,((Ax)A^{-1})=3\,\text{traz}\,(A-I)^T$

Propiedad: $\boxed{\text{traz}(AB)=\text{traz}(BA)}$

$\text{traz}(A^{-1}.(Ax))=\text{traz}(x)=3\text{traz}(A-I)^T$

$-6=3\text{traz}(A^T-I)$

$-2=a+d-2\rightarrow a+d=0$

$\therefore (a+d)\,(b+c)=0$

Rpta.: 0

Pregunta 16

Al resolver el sistema:

$$x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}=34\;...(1)$$

$$x-y=12\;...(2)$$

se puede obtener soluciones enteras para **x** y para **y**; luego **y** es igual a:

A) 16
B) 8
C) 4
D) 2
E) 1

Resolución 16

Sistemas de Ecuaciones

$$\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{x}{y}}+y\sqrt{\dfrac{y}{x}}=34\ \dots(1) \\ x-y=12\ \dots(2) \end{cases}$$

de (1)

$$x^2+y^2=34\sqrt{xy}\ \dots(3)$$

de(2)

$$(x-y)^2=12^2$$

$$x^2+y^2-2xy=144\dots(4)$$

Reemp (3) en (4)

$$34\sqrt{xy}-2xy=144$$

$$\sqrt{xy}^{\,2}-17\sqrt{xy}+72=0$$

$$(\sqrt{xy}-9)(\sqrt{xy}-8)=0$$

$$\rightarrow\ \sqrt{xy}=9 \quad\wedge\quad \sqrt{xy}=8$$

$$xy=81 \qquad xy=64$$

Se tiene:

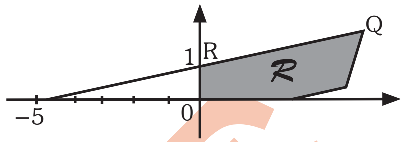
$$\begin{cases} x-y=12 \\ xy=81 \end{cases} \rightarrow \text{ no hay soluciones enteras}$$

$$\begin{cases} x-y=12 \\ xy=64 \end{cases} \rightarrow \ x=16 \wedge y=4$$

Rpta.: 4

Pregunta 17

Dada la región admisible $\mathcal{R}$ del problema de programación lineal.



Determine la función objetivo del problema, de modo que, tanto el punto R como el punto Q sean soluciones mínimas.

A) $x+4y$
B) $-x+7y$
C) $x+10y$
D) $-x-3y$
E) $x-5y$

Resolución 17

Programación lineal

Se observa que la función objetivo pertenece a la familia de las rectas que pasa por los puntos (-5;0) y (0;1), cuya ecuación es:

$$\frac{1}{5}=\frac{y-1}{x}$$

$$x=5y-5$$

$$x-5y=-5$$

$$\therefore\ f(x;y)=x-5y$$

Rpta.: x–5y

Pregunta 18

Dada la sucesión (a_n) definida por:

$$a_n=\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi+(-1)^n 8}{4n}\right], n\in\mathbb{N}$$

Entonces podemos afirmar que:

A) (a_n) converge a $\sqrt{2}/2$

B) (a_n) converge a 1

C) (a_n) converge a 0

D) (a_n) converge a $\pi/4$

E) (a_n) no converge

Resolución 18

Sucesiones

$$a_n=\begin{cases}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi+8}{4n}\right); \text{"n" par} & \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi+8}{4n}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi-8}{4n}\right); \text{"n" impar} & \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi+8}{4n}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Notamos que el límite de cada subsucesión es igual a $\sqrt{2}/2$

$$\Rightarrow \operatorname{Lim} a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a_n \text{ Converge a } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: (a_n) converge a $\sqrt{2}/2$

Pregunta 19

Sea la función $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}, x\geq 1.$

Determine el rango de f.

A) [0, ∞>

B) [1/2, ∞>

C) [1, ∞>

D) [3/4, 1>

E) [2, ∞>

Resolución 19

Funciones

$$f(x)=1-\frac{1}{3^x+1}; x\geq 1$$

Del dominio:

$$3^x\geq 3$$

$$3^x+1\geq 4$$

$$0<\frac{1}{3^x+1}\leq\frac{1}{4}$$

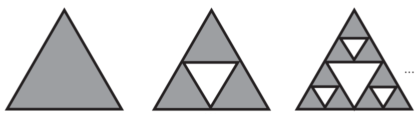
$$-\frac{1}{4}\leq-\frac{1}{3^x+1}<0\rightarrow\frac{3}{4}\leq 1-\frac{1}{3^x+1}<1$$

$$\frac{3}{4}\leq f(x)<1 \rightarrow \operatorname{Ranf}=\left[\frac{3}{4};1\right\rangle$$

Rpta.: [3/4,1>

Pregunta 20

En el siguiente proceso de construcción tenemos inicialmente un triángulo equilátero de área 1, del cual vamos retirando paulatinamente los triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Determine el área total de los triángulos retirados.



(1) (2)

A) 4/8

B) 5/8

C) 6/8

D) 7/8

E) 1

Resolución 20

Sumatorias

Sea: S_n el área de los triángulos retirados en la n-ésima figura.

$\Rightarrow S_0 = 0$

$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\Rightarrow S_4 = \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 27\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$\therefore S_n = \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 27\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\underbrace{\left(\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right)}_{S_n}$$

Rpta: 1

MATEMÁTICA PARTE 2

Pregunta 21

Dado un cuadrado ABCD de lado a > 6, exterior a un plano P. Si las distancias de A, B y C al plano P son 3 u, 6 u y 7 u respectivamente, halle la distancia de D al plano P (en u).

A) 3

B) 3,5

C) 4

D) 4,5

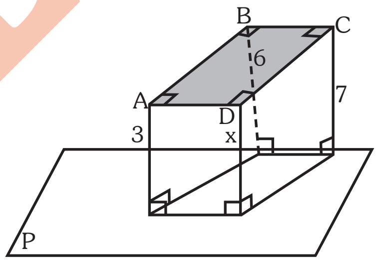
E) 5

Resolución 21

Geometría del espacio

Piden: distancia.

del punto D al plano



* Propiedad en las regiones paralelográmicas

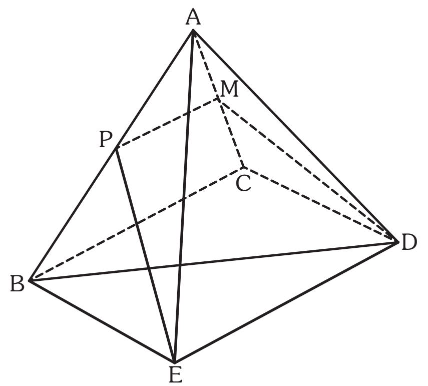
$3+7=6+x$

$x=4$

Rpta.: 4

Pregunta 22

El gráfico muestra una pirámide regular.



Si $ED = 6\,u$, $\overline{PM} // \overline{BC}$, $\dfrac{AP}{PB} = 2$, $m\angle BAE = 60°$ y la distancia de A al plano que contiene los puntos P, M y D es 3 u, calcule el volumen en u^3 de la pirámide A-PMDE.

A) $2\sqrt{27}$

B) $3\sqrt{27}$

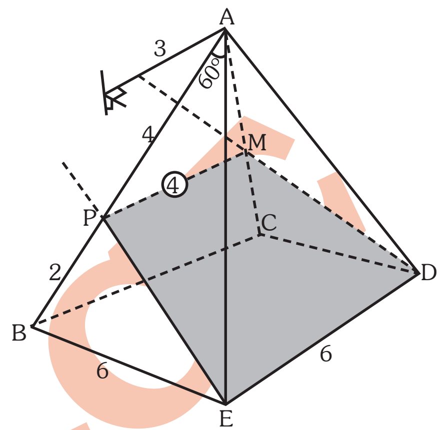
C) $4\sqrt{27}$

D) $5\sqrt{27}$

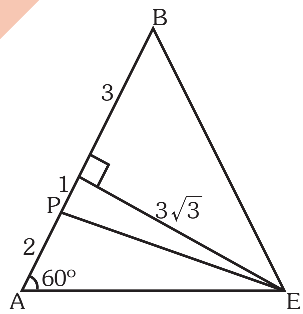
E) $6\sqrt{27}$

Resolución 22

Geometría del espacio

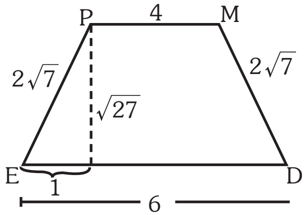


* En Δ equilátero ABE:



$PE = 2\sqrt{7}$

* Trapecio isósceles EPMD:

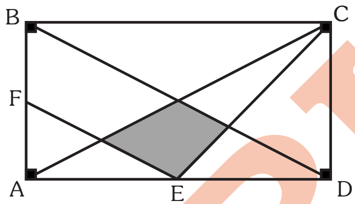


$$\therefore V_{A-PMDE} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{4+6}{2}\right)\sqrt{27}\right].3 = 5\sqrt{27}$$

Rpta.: $5\sqrt{27}$

Pregunta 23

En la figura BC = 16, AB = 12, E y F puntos medios. Determine el área del cuadrilátero sombreado.

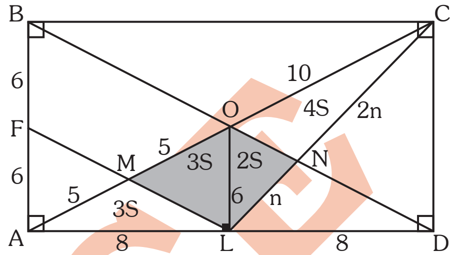


A) 10
B) 15
C) 20
D) 21
E) 25

Resolución 23

Áreas

Piden: $A_{\square\,MONL}$



$\Rightarrow \overline{OL} \perp \overline{AD}$; L = 6

⇨ "N" Baricentro $\triangle$ ACD

⇨ En el $\triangle$ AOL

$6S = \dfrac{6\,.\,8}{2}$

S = 4

$\therefore$ 5S = 20

Rpta.: 20

Pregunta 24

Sea ABCD un rectángulo, M punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ perpendicular al plano ABC, O centro del rectángulo, si BC = 2AB = 8 y PM = AB, entonces el área de la región triangular APO es

A) $2\sqrt{6}$
B) $3\sqrt{6}$
C) $4\sqrt{6}$
D) $7\sqrt{6}$
E) $8\sqrt{6}$

Resolución 24

Geometría del espacio

Piden : $A_{\blacktriangle APO}$

$\triangle$ ABC= Notable

53°/2

$\Rightarrow CA=4\sqrt{5}$

$OA=2\sqrt{5}$

Luego: TEOREMA 3 ⊥

$\triangle$CMP' : Notable 53°/2

$$\Rightarrow MP' = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

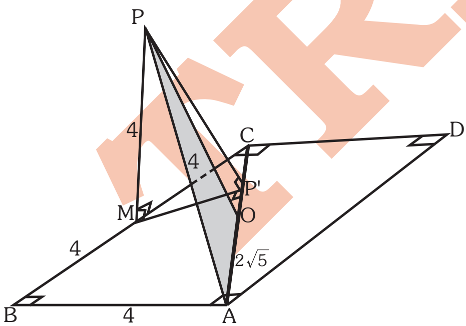
OBS: $\triangle$ MPP : PITÁGORAS

$$4^2+\left(4\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=(PP')^2 \Rightarrow PP'=\frac{4}{3}\sqrt{30}$$

Finalmente

$$A_{\blacktriangle APO}=\frac{4\sqrt{30}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2}=4\sqrt{6}$$

$$\therefore A_{\blacktriangle APO}=4\sqrt{6}$$



Rpta.: $4\sqrt{6}$

Pregunta 25

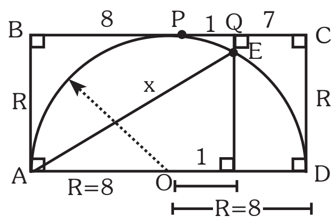
En un rectángulo ABCD (AB < BC), se dibuja una semicircunferencia con diámetro $\overline{AD}$ tangente a $\overline{BC}$ en P. Se ubica el punto Q en $\overline{PC}$ y se traza $\overline{QE}$ perpendicular a $\overline{PC}$ donde el punto E está sobre la semicircunferencia. Si PQ = 1 cm y el perímetro del rectángulo ABCD es 48 cm, entonces la longitud de $\overline{AE}$ (en cm) es:

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

Resolución 25

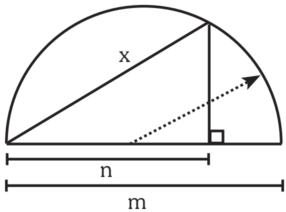
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

- Piden: AE
- Dato: $2P_{\square}=48=6R$



R=8

Luego: Relaciones métricas



$x^2 = m.n$

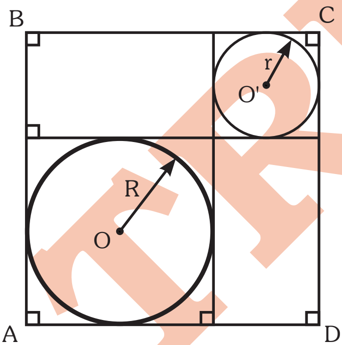
$\Rightarrow x^2 = 16.9$

$\therefore\ x = 12$

Rpta.: 12

Pregunta 26

En la figura mostrada, se tiene que el perímetro del cuadrado ABCD es igual al producto de las longitudes de las circunferencias de centro O y O'. Calcule $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$.



A) $\frac{\pi^2}{3}$

B) $\frac{\pi^2}{2}$

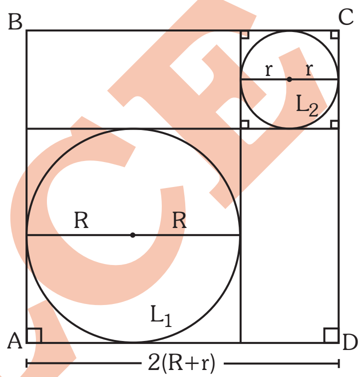
C) $\frac{2\pi^2}{3}$

D) $\frac{3\pi^2}{4}$

E) π^2

Resolución 26

Circunferencia



Piden: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$

Dato: $2p_{ABCD} = L_1 \,.\, L_2$

$8(R+r) = (2\pi R)(2\pi r)$

$\therefore\ \frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{\pi^2}{2}$

Rpta.: $\frac{\pi^2}{2}$

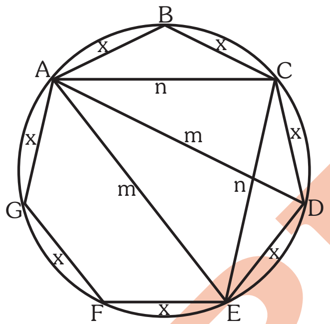
Pregunta 27

Calcule el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG, si: $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{5}$

A) 34
B) 35
C) 36
D) 37
E) 38

Resolución 27

Polígonos regulares



Piden: $2p_{heptágono}$

Dato: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$

T. Ptolomeo

* □ ACDE: inscriptible

$mn=nx+mx$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

$\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}\rightarrow x=5$

$\therefore 2p_{heptágono}=35$

Rpta.: 35

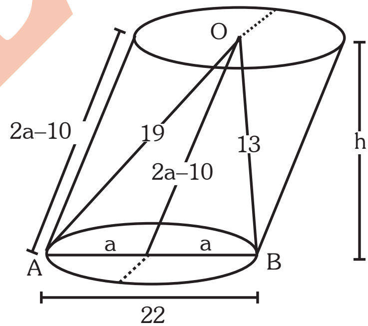
Pregunta 28

La generatriz de un cilindro oblicuo de base circular mide igual que el diámetro del cilindro disminuido en 10 dm. Sean M y N los centros de las bases y $\overline{AB}$ un diámetro de la base inferior que contiene a N. Si AM = 19 dm y MB = 13 dm entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $130\,\pi\sqrt{103}$
B) $131\,\pi\sqrt{104}$
C) $132\,\pi\sqrt{105}$
D) $133\,\pi\sqrt{106}$
E) $134\,\pi\sqrt{107}$

Resolución 28

Cilindro



- Cálculo de la mediana:

$$19^2+13^2=2(2a\text{-}10)^2+\frac{(2a)^2}{2}$$

$a=11$

- T. Herón: ΔAOB.

$$h=\frac{2}{22}\sqrt{27.5.14.8}$$

$$h=\frac{12}{11}\sqrt{105}$$

- $V_{cilindro} = \pi\, 11^2 . \frac{12}{11}\sqrt{105}$
- $V_{cilindro} = 132\pi\sqrt{105}$

Rpta: $132\pi\sqrt{105}$

Pregunta 29

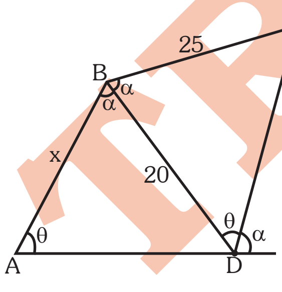
Sea ABCD un cuadrilátero donde el ángulo exterior D mide la mitad del ángulo interior B y la diagonal $\overline{BD}$ biseca al ángulo ABC. Si BC = 25 u y BD = 20 u, determine AB (en u).

A) 12
B) 14
C) 16
D) 18
E) 20

Resolución 29

Semejanza

Piden: AB=x



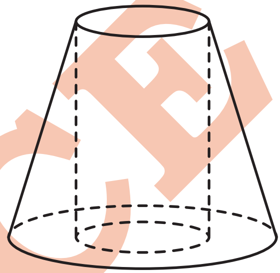
$\Delta ABD \sim \Delta DBC$

$$\frac{x}{20} = \frac{20}{25}$$
$\therefore x=16$

Rpta.: 16

Pregunta 30

La altura de un cono circular recto mide 15 cm y el radio de su base 8 cm. Se taladró un agujero cilíndrico de diámetro 4 cm en el cono, a lo largo de su eje, resultando un sólido como el que se muestra en la figura. Calcule el volumen de ese sólido.

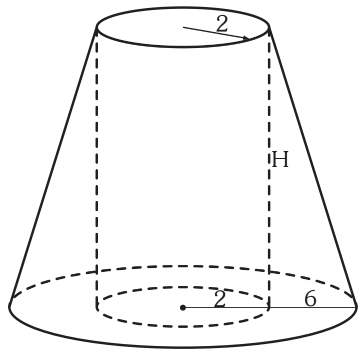


A) $240\pi\ cm^3$
B) $254\pi\ cm^3$
C) $260\pi\ cm^3$
D) $264\pi\ cm^3$
E) $270\pi\ cm^3$

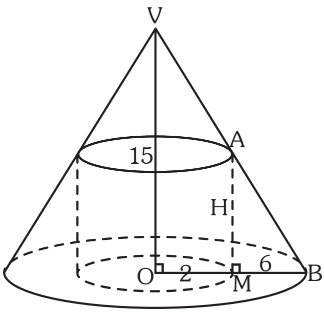
Resolución 30

Sólidos

Piden el volumen del sólido.



Datos:



Semejanza: $\Delta VOB \sim \Delta AMB$

$$\frac{15}{H}=\frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{45}{4}=H$$

Luego:

Vx=Vtronco–Vcili

$$Vx=\frac{45}{4}.\frac{\pi}{3}(4+64+16)-\pi.4.\frac{45}{4}$$

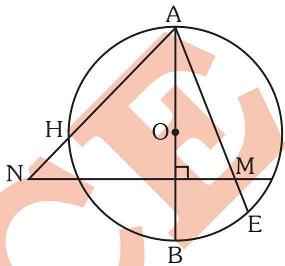
$Vx=315\pi-45\pi$

$\therefore Vx=270\pi$

***Rpta.:* 270π *cm*^{3}**

Pregunta 31

En la figura, O centro de la circunferencia. Si NH=11, AM×AE=900 y m∠ANM=45º, entonces la longitud del diámetro de la circunferencia es:



A) $5\sqrt{2}$

B) $10\sqrt{2}$

C) $15\sqrt{2}$

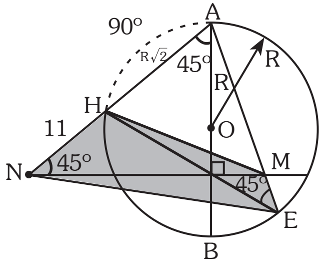
D) $20\sqrt{2}$

E) $25\sqrt{2}$

Resolución 31

R. Métricas en la circunferencia

Piden el diámetro=2R



* $\square$NHME inscriptible
* Teorema de las secantes

$(R\sqrt{2}+11)R\sqrt{2} = (AM)(AE) = 900$

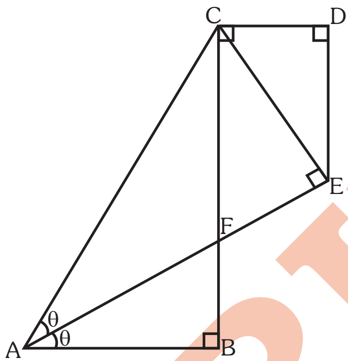
$R\sqrt{2} = 25$

$\therefore 2R = \boxed{25\sqrt{2}}$

Rpta.: $25\sqrt{2}$

Pregunta 32

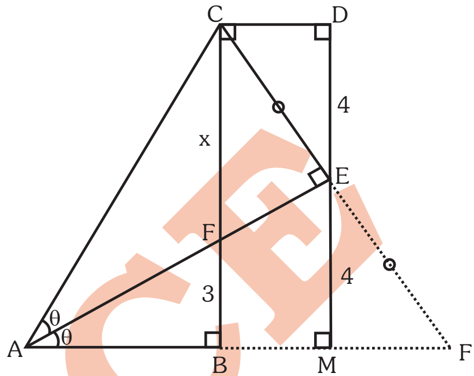
En la figura, BF=3u y ED=4u. Calcule el valor del segmento CF(en u).



A) 4,5
B) 5
C) 5,5
D) 6
E) 6,5

Resolución 32

Congruencia



Piden: x

- Se prolonga $\overline{CE} \rightarrow$ CE=EF
- $\triangle$ CDE ≅ $\triangle$ EMF

  → EM = 4
- x+3 = 8

  ∴ x = 5

Rpta.: 5

Pregunta 33

Calcule el valor aproximado de:

$$E = \text{ctg}(4°) - 7$$

A) 7,07
B) 8,07
C) 9,07
D) 10,1
E) 11,2

Resolución 33

I.T. para el ángulo mitad

$E = \text{ctg}4^o - 7$

Como: $\text{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \text{ctg}\alpha$

$E = \csc 8° + \text{ctg}8° - 7$

$E = 5\sqrt{2} + 7 - 7$

$E = 7{,}07$

Rpta.: 7,07

Pregunta 34

Si $\tan^2\alpha = 2\tan^2x+1$, halle el valor de $y = \cos^2\alpha + \text{sen}^2x$.

A) $\text{sen}^2\alpha$
B) $\cos^2\alpha$
C) $1+\text{sen}^2\alpha$
D) $\tan^2\alpha$
E) $1+\cos^2\alpha$

Resolución 34

Identidades trigonométricas

$\text{tg}^2\alpha = 2\,\text{tg}^2x+1$

$\sec^2\alpha - 1 = 2(\sec^2x - 1)+1$

$\sec^2\alpha = 2\sec^2x$

$\cos^2x = 2\cos^2\alpha$

$1 - \text{sen}^2x = 2\cos^2\alpha$

$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha + \text{sen}^2x$

$\therefore\ y = \text{sen}^2\alpha$

Rpta.: sen²α

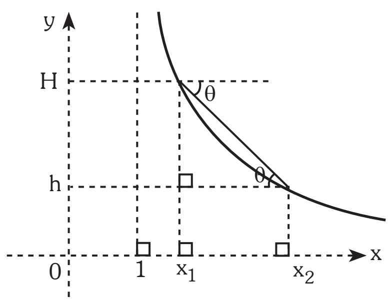
Pregunta 35

Un águila se encuentra a una altura H y ve a una liebre de altura h. Se lanza sobre la presa a lo largo del tramo de la trayectoria descrita por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x>1$, llegando a su presa. Determina la tangente del ángulo de depresión con el cual el águila vio al inicio a su presa.

A) $\dfrac{1}{h}$
B) hH
C) $\dfrac{H}{h}$
D) $\dfrac{H-h}{h}$
E) $\dfrac{H-h}{H+h}$

Resolución 35

Ángulos verticales



Piden:

$$tg\theta = \frac{H-h}{x_2 - x_1}$$

Ahora:

$$y = \frac{1}{x-1}$$

$$x - 1 = \frac{1}{y}$$

$$x_2 - 1 = \frac{1}{h}$$

$$x_1 - 1 = \frac{1}{H}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{H-h}{Hh}$$

Luego:

$tg\theta = hH$

Rpta.: hH

Pregunta 36

En la función: $y(t) = 2\cos 2t + 4\sqrt{2}\ \text{sen}2t$; la amplitud y el periodo son respectivamente:

A) $4\sqrt{2}$ y π

B) $4\sqrt{2}$ y 2π

C) 6 y π

D) 6 y 2π

E) $2 + 4\sqrt{2}$ y π

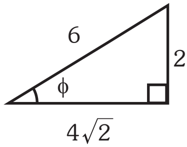
Resolución 36

Funciones trigonométricas

$y(t) = 2\cos 2t + 4\sqrt{2}\ \text{sen}2t$

$$y(t) = 6\left(\frac{2}{6}\cos 2t + \frac{4\sqrt{2}}{6}\text{sen}2t\right)$$

Como:



$y(t) = 6\text{Sen}(2t+\phi)$

Amplitud $= 6$

Periodo $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

Rpta.: 6 y π

Pregunta 37

Si $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, entonces el rango de la función

$$f(x) = \frac{5\pi}{|\arctan x| + 2|\text{arc}\cot x|},$$ es:

A) $\langle 0, 1\rangle$

B) $\langle 1, 2\rangle$

C) $\langle 0, 2\rangle$

D) $\langle 2, 5\rangle$

E) $\langle 5, +\infty\rangle$

Resolución 37

Funciones trigonométricas inversas

$$f(x) = \frac{5\pi}{|\text{arcTg}x| + 2|\text{arcCtg}x|}$$

Como $-\infty < x < 0$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arcTg}(x) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \text{arcCtg}(x) < \pi$$

Entonces:

$$f(x) = \frac{5\pi}{-\text{arcTg}x + 2\text{arcCtg}x}$$

$$f(x)=f(x)=\frac{5\pi}{-\text{arcTg}x+2\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcTg}x\right)}$$

$$f(x)=\frac{5\pi}{\pi-3\text{arcTg}x}$$

Ahora:

$$0<-3\text{arcTg}x<\frac{3\pi}{2}$$

$$\pi<\pi-3\text{arcTg}x<\frac{5\pi}{2}$$

$$2<\frac{5\pi}{\pi-3\text{arcTg}x}<5$$

$$2<f(x)<5$$

$$\text{Ranf}(x)=\langle 2;5\rangle$$

Rpta.: <2; 5>

Pregunta 38

Si $i=\sqrt{-1}$ y $\dfrac{(1+i)^{20}+(1-i)^{20}}{(1+i)^{40}}=\dfrac{1}{A}$, entonces $(A+500)$ es igual a:

A) –12
B) –10
C) –8
D) 10
E) 12

Resolución 38

Números complejos

En su forma exponencial:

$$1+i=\sqrt{2}.e^{i\pi/A};\ 1-i=\sqrt{2}.e^{-i\pi/4}$$

Reemplazando:

$$\frac{2^{10}.e^{i(5\pi)}+2^{10}.e^{-i(5\pi)}}{2^{20}.e^{i(10\pi)}}=\frac{1}{A}$$

$$\frac{-2^{10}-2^{10}}{2^{20}}=\frac{1}{A}$$

$A=-2^9$

Pide: $A+500=-2^9+500$

$=-12$

Rpta.: –12

Pregunta 39

De un disco de cartulina de radio 6 cm, se corta un sector circular de ángulo central $\theta=120^\circ$. Con la parte restante, uniendo los bordes se forma un cono. Determine el coseno del ángulo en el vértice del cono construido.

A) 0

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

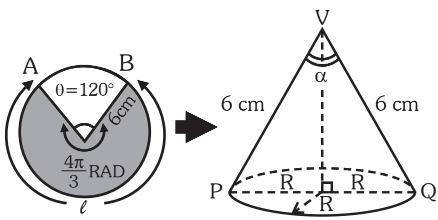
C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{9}$

Resolución 39

Resolución de triángulos oblicuángulos



Perímetro de la base

$\ell = \left(\frac{4\pi}{3}\text{RAD}\right)(6\text{cm}) = 8\pi\text{cm}$

Además: La base es un círculo

$8\pi\text{cm} = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = 4\text{cm}$

En el Δ VPQ

Por ley de cosenos

$$\cos\alpha = \frac{6^2+6^2-(2R)^2}{2.6.6}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{9}$$

Rpta.: $\frac{1}{9}$

Pregunta 40

Halle el valor de $E = \dfrac{-3\tan 840°-2\sqrt{3}}{\text{sen}(750°)+1{,}5}$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 2

Resolución 40

Reducción al primer cuadrante

- $\tan(840^o) = \tan(720^o+120^o) = \tan 120^o$
  $= -\tan 60^o = -\sqrt{3}$
- $\text{sen}(750^o) = \text{sen}(720^o+30^o) = \text{sen}(30) = \frac{1}{2}$

Reemplazando en E:

$$E = \frac{-3(-\sqrt{3})-2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+1{,}5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$