Pregunta 01

Sea A, B y C matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

Si se tiene que: $5X=3(A-4(B+C)-X)+A$

Halle el determinante de X.

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

Resolución 01

Matrices

De la Ec.: $5X=3(A-4(B+C)-X)+A$

$$X=\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B-\frac{3}{2}C$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1 & -6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}\rightarrow \det(X)=13$$

Rpta: 13

Pregunta 02

Halle los valores de x e y respectivamente tales que

$\alpha x+\beta y=-1$

$(\beta-1)x+(\alpha+1)y=3$

además se cumple que:

$\alpha+3\beta+1=3\alpha+\beta+x=\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta\neq 0$

A) 0 y 1
B) 1 y 0
C) 1 y –1
D) –1 y 1
E) 1 y 1

Resolución 02

Sistemas de ecuaciones

Por Cramer:

$$D_s=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta-1 & \alpha+1\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha-\beta^2-\beta$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-1 & \beta\\ 3 & \alpha+1\end{vmatrix}=-\alpha-1-3\beta$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ \beta-1 & 3\end{vmatrix}=3\alpha+\beta-1$$

Por Dato:

$K=\alpha+3\beta+1=3\alpha+\beta+x=\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D_s}=\frac{-K}{K}=-1$$

$$y=\frac{D_y}{D_s}=\frac{3\alpha+\beta-1}{K}=\frac{K}{K}=1$$

Rpta: –1 y 1

Pregunta 03

Si cada una de las series que se suman es convergente, halle:

$$S=\sum_{K=0}^{\alpha}(-1)^k\frac{1}{2^k}+\sum_{K=0}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

A) S = 0
B) S = 2/3
C) S = 1
D) S = 2
E) S = 8/3

Resolución 03

Series geométricas

$$S=\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K\cdot\frac{1}{2^k}}_{\alpha}+\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^K}_{\beta}$$

Propiedad

$$S=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Donde: $|x|<1$

$$\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2/3$$

$$\beta=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$\therefore S=\alpha+\beta=\frac{8}{3}$$

Rpta: S= 8/3

Pregunta 04

Halle la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\ldots$$

A) 1

B) $1+\sqrt[3]{2}$

C) $\sqrt[3]{2}$

D) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$

E) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$

Resolución 04

Series geométricas

Propiedad:

$$S=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Donde: $|x|<1$

En el problema:

$$S=1+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$$

Rpta: $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$

Pregunta 05

Considere a>b>0, determine el cociente entre la menor y mayor de las raíces de la ecuación en x.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$$

A) $\frac{a}{b}$

B) $\frac{b}{a}$

C) ab

D) a+b

E) 1

Resolución 05

Teoría de ecuaciones

Dada la ecuación:

Efectuando:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a+b}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{\cancel{x}+a+b-\cancel{x}}{x(x+a+b)}=-\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\frac{\cancel{a+b}}{x(x+a+b)}=-\left(\frac{\cancel{a+b}}{ab}\right)$$

$$ab=-x(x+a+b)$$

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

$$(x+a)(x+b)=0$$

$$x=-a \wedge x=-b$$

Por dato:

$$a>b>0$$

$$-a<-b<0$$

Entonces:

$\min(x)=-a$

$\max(x)=-b$

$$\therefore\ \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

Rpta: $\frac{a}{b}$

Pregunta 06

Si S es el conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{2x-1}{1-3x}<1\right|$, entonces $S^c=[a,b]$.
Determine el valor de 3a+5b, donde S^c es el complemento de S.

A) -2

B) -1

C) 0

D) 2

E) 3

Resolución 06

Valor Absoluto

De la inecuación:

$$\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|<1;\ x\neq\frac{1}{3}$$

$\rightarrow|2x-1|<|1-3x|$

propiedad: $|a|<|b|\rightarrow(a+b)(a-b)<0$

$|2x-1|<|1-3x|\rightarrow(-x)(5x-2)<0$

$x(5x-2)>0$

Por el criterio de los puntos criticos:

$$S=\langle-\infty;0\rangle\cup\left\langle\frac{2}{5};+\infty\right\rangle$$

Entonces

$$S^c=\left[0;\frac{2}{5}\right]=[a;b]$$

$\therefore 3a+5b=2$

Rpta: 2

Pregunta 07

Sea la función f que satisface la ecuación

$f(x)^2 + 2f(x) = x+1$. Si f toma valores positivos en su dominio, halle tal dominio.

A) $\langle -1, +\infty \rangle$

B) $[0, +\infty\rangle$

C) $\langle -\infty, 0\rangle$

D) R

E) $\langle -1, 1\rangle$

Resolución 07

Funciones

Dada la ecuación

$f^2_{(x)} + 2f(x) = x+1$

$(f(x)+1)^2 = x+2$

Por dato: $f(x)>0; \forall x\in Dom(f)$

$\rightarrow f(x)+1 = \sqrt{x+2}$

$f(x) = \sqrt{x+2} - 1 > 0$

$\sqrt{x+2} > 1$

$x>-1 \wedge x\geq -2$

$\therefore Dom(f) = <-1,\infty>$

Rpta: <-1,+∞>

Pregunta 08

Sean los conjuntos:

$A = \{(x; y) \in R^2/x-1 \leq y \leq x+1\}$

$B = \{(x; y) \in R^2/1 \leq y \leq 3\}$

Después de graficar $A\cap B$ se obtiene los vértices: (a; b), (c; d), (e; f), (g; h)

Calcule: a + b + c + d + e + f + h

A) 8

B) 2

C) 16

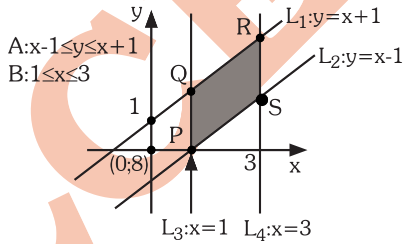
D) 20

E) 24

Resolución 08

Relaciones

Graficando las relaciones: $A\cap B$



$L_1 \cap L_4 \rightarrow R = (3;4)$

$L_2 \cap L_4 \rightarrow S = (3;2)$

$L_1 \cap L_3 \rightarrow Q = (1;2)$

$L_1 \cap L_2 \rightarrow P = (1;0)$

Rpta: 16

Pregunta 09

Sea $f:R \rightarrow R$ una función, tal que cumple:

$f(ax+by)af(x)+bf(y)$ para cualquier $a,b,x,y\in R$, donde $f(1)= 1$.

Si $y^{f(2)}+6y+f(9)=n^2$. Halle un valor de y.

A) 3 – n

B) n – 3

C) n – 2

D) 2 – n

E) n – 2

Resolución 09

Funciones

Siendo:

$f_{(ax+by)}=af_{(x)}+bf_{(y)};\ \forall a,b,x,y\in R$

$f_{(1)}=1$

se tiene:

$f_{(2)}=1f_{(1)}+1f_{(1)}=2f_{(1)}=2$

$f_{(9)}=3f_{(1)}+3f_{(2)}=3+6=9$

Reemplazando

$y^{f(2)}+6y+f_{(9)}=n^2$

$y^2+6y+9\text{-}n^2=0$

$(y+3\text{-}n)(y+3+n)=0$

$\rightarrow y_1=n\text{-}3\wedge y_2=\text{-}n\text{-}3$

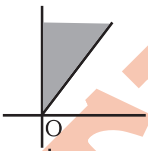
Rpta: n-3

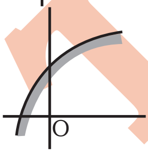
Pregunta 10

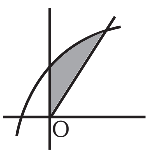
Señale el gráfico de $R_1 \cap R_2$, donde

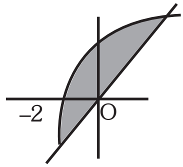
$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\geq(x+1)^{\mathrm{Log}_{(x+1)}(x)}\right\}$

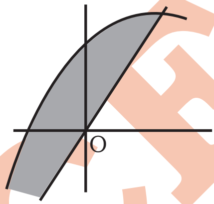
$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\leq 1+\mathrm{Log}(x+2)\}$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Resolución 10

Relaciones

Por definición:

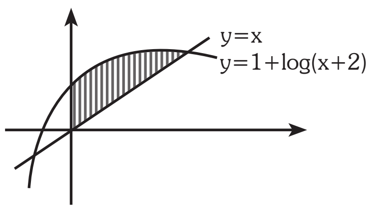
$\log_b N: N>0\wedge b>0\wedge b\neq 1$

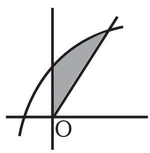
$y\geq\cancel{(x+1)}^{\log_{\cancel{(x+1)}}(x)}\ ;\ x+1>0\wedge x>0\wedge x\neq 0$

$y\geq x\quad ;\quad x>0$

$R_2=\{(x,y)\in R^2/y\leq 1+\log(x+2)\}$

Graficando $R_1\wedge R_2$



Rpta: 

Pregunta 11

Una editorial ha realizado un estudio y concluye que si regala x libros a docentes universitarios, el número de ventas de estos libros es de $2000–1000e^{-0.001x}$.

Indique la secuencia correcta después de determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. La venta de libros aumenta si se regalan más libros.

II. Si no se regalan libros, se venden 1000 libros.

III. El máximo número de libros a vender es 2000.

A) VVV
B) FVV
C) FVF
D) VFV
E) FFV

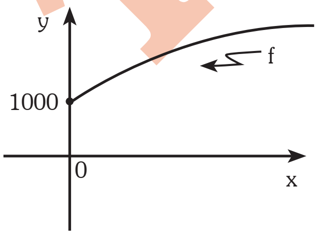
Resolución 11

Funciones

Se tiene: $f_{(x)} = 2000 - 1000 - 1000\left(\frac{1}{e}\right)^{0,001x}$

Donde: $f_{(x)}$: número de venta de libros

Graficando la función exponencial



I. La función exponencial es creciente
El número de venta de libros aumenta si se regalan más libros (V)

II. Para x=0 → $f_{(0)} = 1000$ (V)

III. Para "x" muy grande: $\left(\frac{1}{e}\right)^{0,001x} \approx 0$

$\rightarrow f_{(x)} = 2000 - 0 = 2000$ (V)

Rpta: VVV

Pregunta 12

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $A=A^T$ donde A es triangular superior, entonces A es matriz nula.

II. Si $A=-A^T$ donde A es triangular inferior, entonces A es matriz diagonal.

III. Si A es una matriz rectangular de orden mxn, entonces AA^T es una matriz cuadrada de orden mxm y todos los elementos de su diagonal son no negativos.

A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FFV
E) FFF

Resolución 12

Matrices

I. Si $A = A^T$ entonces A es una matriz simétrica también A es una matriz triangular superior.
$\longrightarrow A = \{a_{ij}\} = 0; \forall i \neq j$
Se concluye que la matriz no necesariamente es nula. (F)

II. Si $A = -A^T$ entonces A es una matriz antisimetrica.
Por lo tanto $\{a_{ij}\} = 0; \forall i = j$
Ademas A es triangular inferior. Entonces A es una matriz nula. (F)

III. Siendo:
$A = \{a_{ij}\}mxn$ y
$A^T = \{a_{ij}\}nxm$
Entonces:
$C = A \times A^T = \{C_{ij}\}mxn$
Donde:
$C_{ij} \geqslant 0 : \forall i = j$ en R. (V)

- Pero para el conjunto de los números complejos la proposición es falsa.

Rpta: FFF

Pregunta 13

Sea N=111/111$_{(3)}$. Calcule la suma de dígitos al multiplicar en base 3, N consigo mismo.

A) $100_{(3)}$
B) $101_{(3)}$
C) $110_{(3)}$
D) $111_{(3)}$
E) $112_{(3)}$

Resolución 13

Numeración

$$N = 111111_{(3)} \rightarrow 2N = 222222_{(3)}$$

$$\begin{array}{l} 2N + 1 = 1000000_{(3)} \\ 2N - 1 = 222221_{(3)} \\ \hline 4N^2\text{-}1 = 222221000000 \end{array} \quad \downarrow \langle x \rangle$$

$$N^2 = \frac{222221000001_{(3)}}{4} = 20201202021_{(3)}$$

$$\sum \text{cifras}(N^2) = 2+2+1+2+2+2+1$$

$$12 = 110_{(3)}$$

Rpta: $110_{(3)}$

Pregunta 14

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. Si $y \in Q \setminus \{0\}$, $x \in Q$, entonces $\frac{x}{y} \in Q$.

II. Si a,b son irracionales, entonces a+b y a.b son racionales.

III. Si $a \in Q$ y b es irracional entonces a.b es un número irracional.

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FVV
E) FFF

Resolución 14

Números Reales

I. $y \in [Q - \{0\}],\ x \in Q$, entonces: $\dfrac{x}{y} \in Q$ ... (V)

$(y = \dfrac{a}{b},\ a \in Z^{*} \wedge b \in Z^{*}) \wedge (x = \dfrac{c}{d},\ c \in Z \wedge d \in Z^{*}) \rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{bc}{ad} \in Q,\quad Z^{*} = Z - \{0\}$

II. Si: $a, b \in Q'$(irracionales), entonces: $a + b$ y $a.b$ son racionales ... (F)

porque por ejem $\left.\begin{array}{l} \text{si:}a=\sqrt{3}+1 \\ b=\sqrt{3}-1 \end{array}\right\} (a+b=2\sqrt{3}) \wedge (a.b=8)$

III. Si $a \in Q$ y $b \in Q'$ (irracionales), entonces $a.b$ es un número irracional ... (F)

$a = \dfrac{m}{n}$ y $b \in Q'$, entonces: $ab = \dfrac{m}{n}.b \in Q'$

$(m \in Z$ y $n \in Z^{*})$

(irracionales) $\leftrightarrow m \neq 0$

es decir $a \neq 0$

como no indica que $a \neq 0$, entonces la proposición es falsa.

Rpta: VFF

Pregunta 15

Sea:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,7\,a\,b\,c\,d\,9} & *\,*\,*\,* \\ 1 & \\ -7a & \\ *\,* & \\ -8\,b\,c & \\ *\,*\,* & \\ -2\,6\,d\,9 & \\ *\,*\,6\,* & \\ -\,-\,-\,e & \end{array}$$

donde a, b, c, d y e corresponden a un solo dígito y* puede tomar diferentes valores de un dígito. Determine el valor de:

$$E=e+d-c+b-a.$$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Resolución 15

Radicación

Reconstruyendo la $\sqrt{}$:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1'\,7\,a'\,b\,c'\,d\,9} & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ * & * & * & * \end{array} \\ \hline 1 & 2\,3 \times 3 = 69 \\ 1\,7\,a & 2\,6\,3 \times 3 = 789 \\ 6\,a & 2\,6\,6\,1 \times 1 = 2661 \\ -\,8\,b\,c & \\ 7\,8\,a & \\ -\,2\,6\,d\,9 & \\ 2\,6\,6\,1 & \\ -\,-\,-\,8 = e & \end{array}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 1 \\ c = 5 \\ d = 6 \\ e = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E = e + d - c + b - a \\ E = 8 + 6 - 5 + 1 - 7 \\ E = 3 \end{array}$$

Rpta: 3

Pregunta 16

Las magnitudes x e y son tales que $(y-4)$ y (x^2-4) son inversamente proporcionales. Si el par $(-1,-2)$ satisface esa relación, determine la ecuación de proporcionalidad.

A) $y=\dfrac{18}{x^2-4}+4$

B) $y=\dfrac{-18}{x^2+4}-4$

C) $y=\dfrac{18}{x^2-4}-4$

D) $y=\dfrac{18}{x^2-4}+6$

E) $y=\dfrac{-18}{x^2-4}+12$

Resolución 16

Proporcionalidad

Si $(y-4)$ y (x^2-4) son I.P.

$\rightarrow (y-4)\cdot(x^2-4)=K$ .... (I)

luego para el par :

$$(-1;-2)=(x;y)\begin{cases} x^2-4=(-1)^2-4=-3 \\ y-4=(-2)-4=-6 \end{cases}$$

* Reemplazando en (I): K = (-6) (-3) = 18

Ahora tenemos que:

$(y-4)\,.\,(x^2-4)=18$

Despejando

$$y-4=\frac{18}{x^2-4}$$

Rpta: $y=\dfrac{18}{x^2-4}+4$

Pregunta 17

Si la diferencia entre la media aritmética y la media armónica de dos números naturales a y b es 1. Determine el menor valor de $\sqrt{a^2+b^2}$ asumiendo que $a > b$.

A) $\sqrt{10}$

B) $\sqrt{13}$

C) $2\sqrt{10}$

D) $2\sqrt{13}$

E) $6\sqrt{5}$

Resolución 17

Promedios

$$\left.\begin{array}{l} MA(a;b)=\dfrac{a+b}{2} \\ MH(a;b)=\dfrac{2ab}{a+b} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=1 \\ \dfrac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=1 \end{array}$$

Luego: $(a-b)^2=2(a+b)$

Esto se cumple si: $a+b=2k^2 \wedge a-b=2k$

Resolviendo: $\boxed{a=k^2+k}$ y $\boxed{b=k^2-k}$

Los menores valores naturales se obtienen para :

$$k=2\rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2^2+2=6 \\ b=2^2-2=2 \end{array}\right\}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$$

Rpta: $2\sqrt{10}$

Pregunta 18

Dos capitales han sido colocados a interés simple durante el mismo tiempo; el primero al 6% y el segundo al 10%. El primero ha producido S/. 825 y el segundo ha producido S/. 1850, sabiendo que el segundo capital excede al primero en S/. 7125. Calcule la suma de los montos obtenidos (en nuevos soles).

A) 48 375
B) 51 050
C) 52 110
D) 53 030
E) 54 100

Resolución 18

Regla de interés

De los datos C_1 x 6% x T=825............(I)
C_2 x 10% x T=1850 ....(II)

(I) ÷ (II): $\dfrac{C_1\times 3}{C_2\times 5}=\dfrac{33}{74}\rightarrow\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{55k}{74k}$

Pero: $C_2-C_1=7215$

$$K=375\Rightarrow\begin{cases}C_1=55(375)=20625\\C_2=74(375)=27750\end{cases}$$

Luego: $M_1=C_1+I_1=20625+825=21450$
$M_2=C_2+I_2=27750+1850=29600$

$\Rightarrow M_1+M_2=51050$

Rpta: 51 050

Pregunta 19

Una encuesta realizada en la ciudad de Lima muestra la tabla siguiente:

Nº de hijos	Nº de familias
0 – 2	1 200
3 – 6	400
7 – 9	150
10 – 12	30
13 – 15	15

Calcule el número de familias que tiene de 4 hasta 11 hijos.

A) 380
B) 470
C) 480
D) 570
E) 580

Resolución 19

Estadística

- El número de hijos es una variable discreta.

Luego:

Piden de 4 hasta 11 hijos.

$$\text{N° hijos}\Rightarrow \overbrace{3;\underbrace{4;5;6}}^{400}\quad \overbrace{\underbrace{7;8;9}}^{150}\quad \overbrace{\underbrace{10;11};12}^{30}$$

$$\frac{3}{4}(400)+150+\frac{2}{3}(30)$$

$$\underbrace{300+150+20}_{470}$$

Rpta: 470

Pregunta 20

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. Sean A, B, C eventos, entonces

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)+$
$+P(B\cap C)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

II. Sean

$S=\{(x,y)/x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$

$B = \{(x,y) \in S / 1 + y < x\}$

entonces $P(B) = \frac{5}{12}$

III. Si $B \subset A$, entonces $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$

Donde P(X) representa la probabilidad del evento X.

A) V V V
B) V F V
C) F V V
D) F F V
E) F F F

Resolución 20

Probabilidades

I. Sean A, B, C eventos

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$ ... (F)

Debe ser:

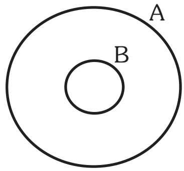
$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

II. Sean: $S = \{(x;y)/x,y \in \{1;2;3;4;5;6\}\} = \{(1;1);(1;2);(1;3); \ldots ;(6;5);(6;6)\}$

$n(S) = 36$ y $B = \{(x;y)$ es $/ 1 + y < x\}$ $= \{(3;1);(4;1);(4;2)(5;1);(5;2);(5;3);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4)\} \Rightarrow n(B) = 10$

$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ por lo que: $P(B) = \frac{5}{12}$ ... (F)

III. Si: $B \subset A$, entonces: $P(A-B) = P(A) - P(B)$ ... (V)



$n(A-B) - n(A) - n(B)$ ... $(B \subset A)$

$$\frac{n(A-B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} - \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$\boxed{P(A-B) = P(A) - P(B)}$$

Rpta: FFV

MATEMÁTICA PARTE 2

Pregunta 21

Determina la cónica que representa la ecuación polar.

$$r = \frac{8}{4 + 3\cos\theta}$$

A) Hipérbola
B) Parábola
C) Elipse
D) Circunferencia
E) Un punto

Resolución 21

Geometría analítica

Sabemos:

$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{Sen}\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

Del dato:

$4r+3r\text{Cos}\theta= 8$

A coordenadas cartesianas:

$4r= 8 - 3x$

$16r^2= 64 - 48x+49x^2$

$16x^2+16y^2 = 64 - 48x+9x^2$

$7x^2+16y^2+48x - 64= 0$

Rpta: Elipse

Pregunta 22

Sea θ un ángulo en el III cuadrante que satisface.

$$(\cot\theta)^{2\tan\theta}=\frac{8}{27}$$

Determine el valor de $E=3\cos\theta+2\text{sen}\theta$

A) $\dfrac{9}{\sqrt{12}}$

B) $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$

C) $\dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

D) $\dfrac{-12}{\sqrt{13}}$

E) $\dfrac{-13}{\sqrt{12}}$

Resolución 22

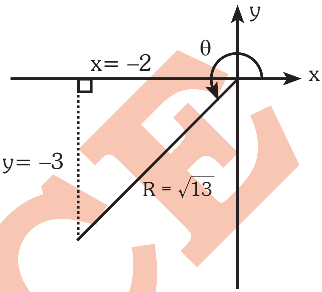
R.T. Cualquier magnitud

Dato:

$$(\text{Ctg}\theta)^{2\text{Tg}\theta}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$(\text{Ctg}\theta)^{2\text{Tg}\theta}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \text{Tg}\theta=\frac{3}{2}$$



Piden:

$$E=3\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)+2\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$E=\frac{-12}{\sqrt{13}}$$

Rpta: $\dfrac{-12}{\sqrt{13}}$

Pregunta 23

Determine a cuál de los siguientes intervalos pertenece la solución de la ecuación trigonométrica $\cos^2x-\cos x-1=0$

A) $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}$

B) $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$

C) $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{6}$

D) $\dfrac{3\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{6}$

E) $\dfrac{5\pi}{6}<x<\pi$

Resolución 23

$\text{Cos}^2\text{x-Cosx-1}=0$

$$\text{Cosx}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-1)}}{2}$$

$$\text{Cosx}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

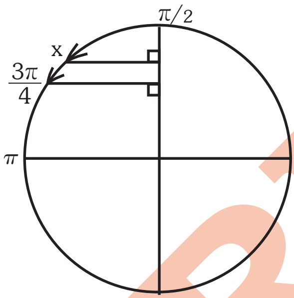
Como: $-1\leq \text{Cosx}\leq 1$

$$\rightarrow \text{Cosx}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0,6$$

Cosx: (–) $\quad x\in \text{IIQ v IIIQ}$

Como $\text{Cos}\frac{3\pi}{4}\cong -\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -0,7$

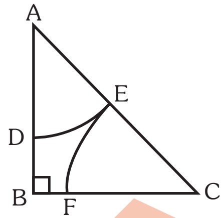
En la C.T.



Rpta: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$

Pregunta 24

La figura adjunta representa sectores circulares en el triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcule (en cm) la suma de las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{EF}$ si AC=1 cm.



A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

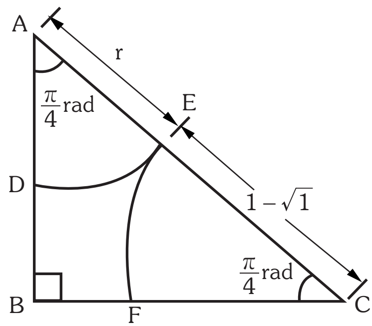
D) $\frac{3\pi}{2}$

E) 2π

Resolución 24

Longitud de Arco

$\triangle$ABC: Isósceles; $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCA=\frac{\pi}{4}\text{rad}$



Aplicando: $\boxed{\ell=\theta.r}$

- $L_{\overset{\frown}{DE}} = \frac{\pi}{4}r$
- $L_{\overset{\frown}{FE}} = \frac{\pi}{4}(1-r)$

Piden:

$$L_{\overset{\frown}{DE}} + L_{\overset{\frown}{FE}} = \frac{\pi}{4}(r+1-r)$$

$$L_{\overset{\frown}{DE}} + L_{\overset{\frown}{FE}} = \frac{\pi}{4}$$

Rpta: $\therefore \frac{\pi}{4}$

Pregunta 25

Calcule $M=\mathrm{sen}^4\theta+\mathrm{sen}^4 2\theta+\mathrm{sen}^4 3\theta$; si $\theta=\pi/7$

A) 21/13
B) 21/14
C) 21/15
D) 21/16
E) 21/17

Resolución 25

Transformaciones trigonométricas

Piden:

$$M = \mathrm{Sen}^4\frac{\pi}{7} + \mathrm{sen}^4\frac{2\pi}{7} + \mathrm{sen}^4\frac{3\pi}{7}$$

Como:

$$8\mathrm{sen}^4\alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$

Luego:

$$8M = 3 - 4\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$3 - 4\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} \longrightarrow \cos\frac{6\pi}{7}$$

$$3 - 4\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} \longrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}$$

$$8M = 9 - 3\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

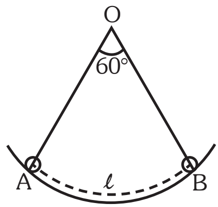
$$8M = 9 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$M = \frac{21}{16}$$

Rpta: 21/16

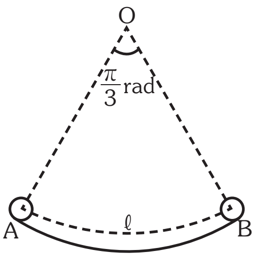
Pregunta 26

Calcule el número de vueltas que da una rueda de radio r=0,5 cm, al rodar (sin resbalar) en un arco circular $\overset{\frown}{AB}$ de radio R=6 cm y ángulo central 60° (ver figura).



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 26



- r= 0,5 cm
- R= 6 cm

$$\ell = \left(\frac{\pi}{3}\right)(R-r)$$

$$\ell = \frac{11\pi}{6}\text{cm}$$

Número de vueltas de r: n_{v_r}

$$n_{v_r} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

$$n_{v_r} = \frac{11}{6} = 1{,}83$$

Nota:

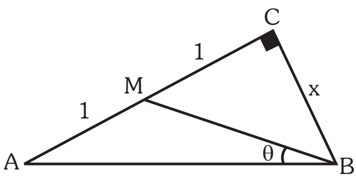
Si la rueda se traslada en forma perpendicular al plano de la pista, entonces $\ell = \ell\overset{\frown}{AB}$

$\therefore n_{v_r} = 2$

Rpta: 2

Pregunta 27

Calcule el valor de x para que el ángulo θ sea máximo.



A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

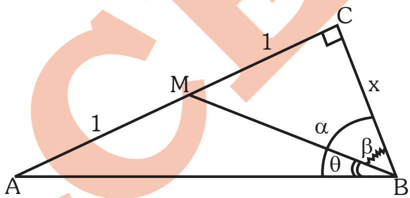
C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{7}$

E) $\sqrt{11}$

Resolución 27

Identidades trigonométricas para la suma y resta



θ es máximo →"Tanθ" es máximo

$$\text{Tan}\theta = \text{Tan}(\alpha-\beta) = \frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\beta}{1+\text{Tan}\alpha.\text{Tan}\beta}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{x+\frac{2}{x}}$$

$x+\frac{2}{x}$ debe ser mínimo

$(x).\left(\frac{2}{x}\right)$ es constante $\rightarrow \left(x+\frac{2}{x}\right)$ es mínimo si:

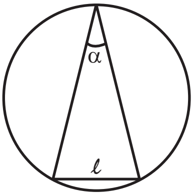
$$x = \frac{2}{x}$$

$\therefore x = \sqrt{2}$

Rpta: $\sqrt{2}$

Pregunta 28

En la circunferencia de radio R de la figura, determine el ángulo α de modo que ℓ=R.



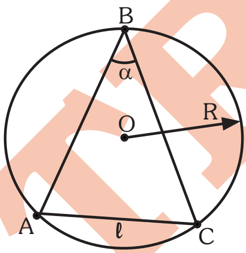
A) 15°
B) 18°
C) 30°
D) 36°
E) 45°

Resolución 28

Polígonos regular

Datos: ℓ= R

Piden: "α".



$\ell = \ell_6 = R$

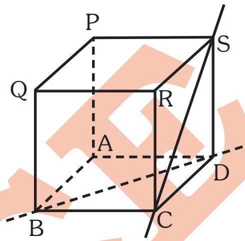
$\Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 60° = 2\alpha$.

Luego: $\alpha = 30°$

Rpta: 30°

Pregunta 29

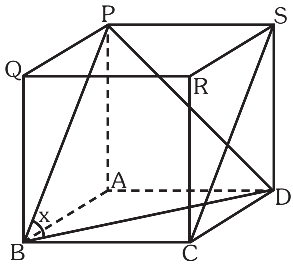
La figura representa un cubo de arista a cm. Calcule el ángulo que forman las rectas $\overline{CS}$ y $\overline{BD}$.



A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 90°

Resolución 29

Geometría del espacio



Piden: $\measuredangle \overline{CS} \wedge \overline{BD}$

se traslada $\overline{CS} // \overline{BP} \rightarrow BP=PD=BD$

ΔBPD equilátero

$\rightarrow \measuredangle \overline{CS} \wedge \overline{BD} = x$

$\therefore x = 60°$

Rpta: 60°

Pregunta 30

Una pirámide de base cuadrada y un cono tienen el vértice común "O", la base de la pirámide está inscrita en la base del cono. Halle el volumen comprendido entre las caras de la pirámide y la superficie del cono, si el lado del cuadrado mide $\sqrt{2}$ m y la generatriz del cono 9 m.

A) $\frac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\ m^3$

B) $\frac{8\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\ m^3$

C) $\frac{13\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\ m^3$

D) $\frac{6\sqrt{5}}{5}(\pi-2)\ m^3$

E) $\frac{8\sqrt{5}}{5}(\pi-2)\ m^3$

Resolución 30

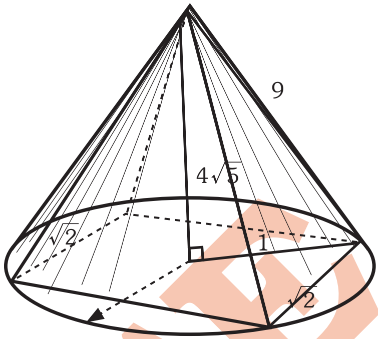
G. Espacio

Piden: V_{CONO} - $V_{PIRÁMIDE}$

$$V_{CONO}=\frac{\pi 1^2 .4\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}\ \pi}{3}$$

$$V_{PIRÁMIDE}=\frac{\sqrt{2}^2 .4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore V_{CONO} - V_{PIRÁMIDE}=\frac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)$$



Rpta: $\frac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\ m^3$

Pregunta 31

Por el vértice B de un triángulo ABC se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con los vértices A y C. Además se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ ($H\in\overline{AC}$). Si $BH=\frac{36}{5}$, $BD=\frac{36}{5}\sqrt{3}$, entonces $\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}}$ es:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) 2

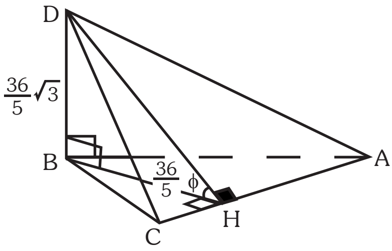
D) $\frac{5}{2}$

E) 3

Resolución 31

Espacio

Piden: $\dfrac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}}$



Teorema: Área proyectada

– $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC}.\text{Cos}\phi$

◺BDH: Notable (30° y 60°)

$\Rightarrow \text{Cos}\phi = \dfrac{1}{2}$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC}\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}} = 2$

Rpta: 2

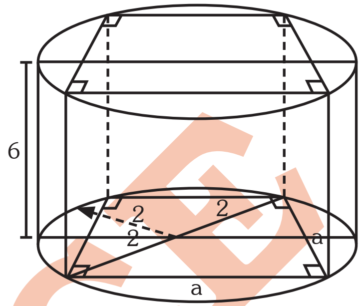
Pregunta 32

En un cilindro circular recto, de radio 2 cm y altura 6 cm, se inscribe un paralelepípedo rectangular. El máximo volumen (en cm^3) que puede tener tal paralelepípedo es:

A) 44
B) 45
C) 48
D) 49
E) 51

Resolución 32

Cilindro



Piden $V_{\text{Max del paralelepipedo}} = ?$

Volumen será maximo si el área de la base es máxima entonces la base es regular (cuadrado) del gráfico $a = 2\sqrt{2}$

$V=(B)(h)=(2\sqrt{2})^2 6$

$V=48$

Rpta: 48

Pregunta 33

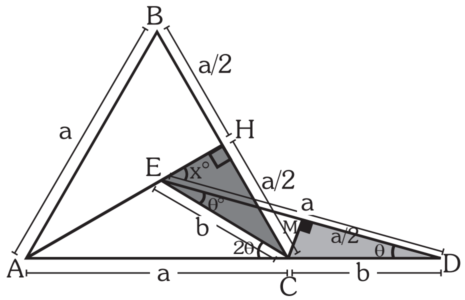
En un triángulo equilátero ABC, sobre la altura $\overline{AH}$ ($H \in \overline{BC}$) se toma el punto E y en la prolongación de $\overline{AC}$ se toma el punto D ($C \in \overline{AD}$), tal que EC= CD y AC= ED. Halle m∡HED.

A) 40°
B) 45°
C) 48°
D) 50°
E) 52°

Resolución 33

Congruencia

Piden: x



Del gráfico:

$\Delta EHC \cong \Delta MCD$

Caso (L.L.L)

$\Rightarrow m\sphericalangle ECH=\theta$

Luego: $2\theta+\theta=60°$

$\theta=20°$

$\therefore x+20+20=90$

$x=50°$

Rpta: 50°

Pregunta 34

En un trapezoide dos ángulos interiores opuestos se diferencian en 24°. Calcule el ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.

A) 196°
B) 186°
C) 175°
D) 168°
E) 123°

Resolución 34

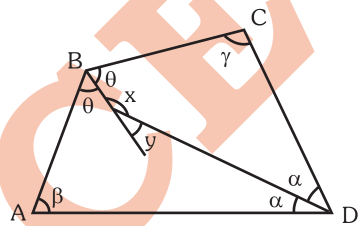
Cuadrilátero

Piden: x

dato: $\gamma - \beta = 24°$

por propiedad $y = \frac{\gamma - \beta}{2} = 12°$

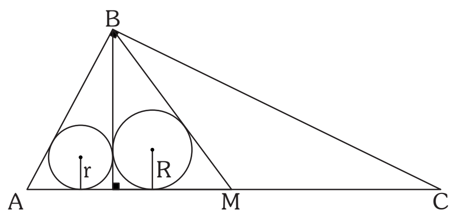
$\Rightarrow x = 168°$



Rpta: 168°

Pregunta 35

En la figura M es punto medio de $\overline{AC}$ y las circunferencias están inscritas en los triángulos. Si AB= K_1r; R= K_2r, entonces se cumple la relación:



A) $\frac{K_1+1}{K_2}<2$

B) $\frac{K_1+1}{K_2}<1$

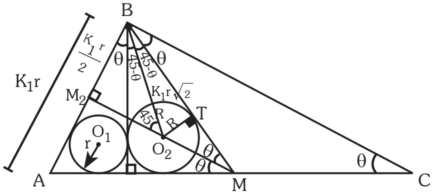
C) $\frac{K_1+K_2}{K_1}<\frac{1}{2}$

D) $\dfrac{K_1+K_2}{K_1}<2$

E) $\dfrac{K_2+1}{K_1}<\dfrac{1}{2}$

Resolución 35

Circunferencia



Trazamos $O_2T \perp \overline{MB}$

⊿ O_2TB: $O_2B > O_2T$

$$\frac{K_1 r\sqrt{2}}{2} > R$$

$$\frac{K_1\sqrt{2}}{2}\cancel{r} > K_2\cancel{r}$$

$$K_1 > K_2\sqrt{2} > K_2$$

$$\frac{K_2}{K_1} < 1$$

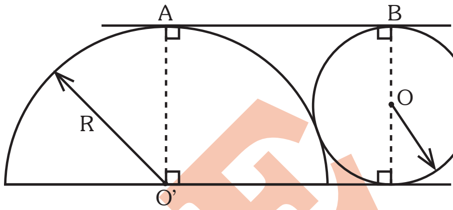
$$\frac{K_2}{K_1}+1 < 2$$

$$\therefore\ \frac{K_1+K_2}{K_1} < 2$$

Rpta: $\dfrac{K_1+K_2}{K_1}<2$

Pregunta 36

En la figura mostrada, si $AB = 4\sqrt{2}$ m. Halle R (en metros).

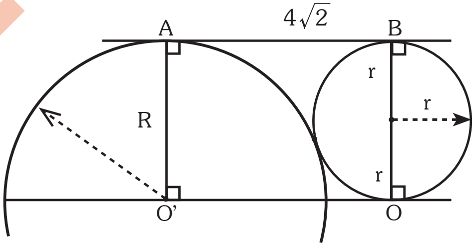


A) 2
B) 2,5
C) 3
D) 3,5
E) 4

Resolución 36

Relaciones métricas

Piden: R



O'A=OB

$\Rightarrow$R=2r

Por la propiedad:

$AB = 2\sqrt{Rr}$

$4\sqrt{2} = 2\sqrt{Rr}$

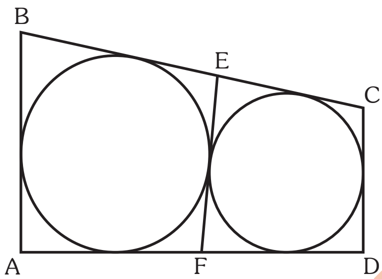
$$4\sqrt{2}=2\sqrt{R.\frac{R}{2}}$$

$\Rightarrow R=4$

Rpta: 4

Pregunta 37

En la figura mostrada, se tiene que AB + CD = 30 m y BC + AD = 50 m, calcule EF.

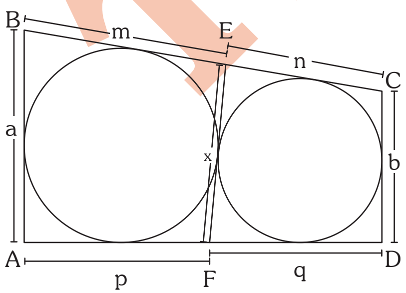


A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

Resolución 37

Circunferencia

Piden x



T. Pithot:

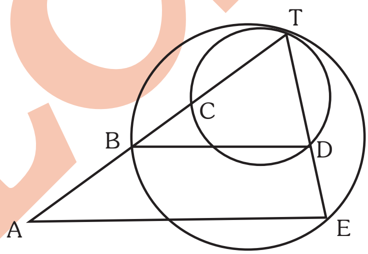
$$\begin{aligned} a+x &= m+p \\ x+b &= n+q \\ \hline 30+2x &= 50 \end{aligned} \quad +$$

$\therefore x=10$

Rpta: 10

Pregunta 38

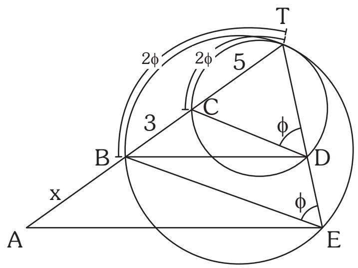
En el gráfico mostrado $\overline{BD}$ es paralelo a $\overline{AE}$ y T es punto de tangencia. Calcule AB (en cm), si CT = 5 cm y BC = 3 cm.



A) 2,6
B) 3,7
C) 4,8
D) 5,9
E) 6,5

Resolución 38

Proporcionalidad



Piden: AB= x

m $\overset{\frown}{CT}$ = m $\overset{\frown}{BT}$ = 2ϕ

$$\frac{CT}{BC} = \frac{TD}{DE} = \frac{5k}{3k}$$

$\overline{BD}$ // $\overline{AE}$; por Thales

$$\frac{BT}{AB} = \frac{TD}{DE} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{5k}{3k} \Rightarrow x = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

Rpta: 4,8

Pregunta 39

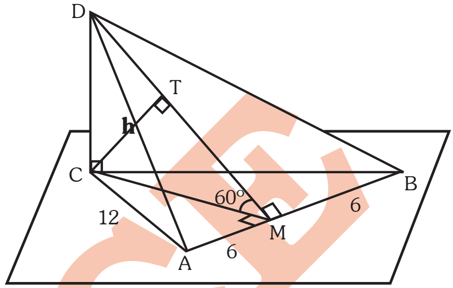
Se tiene el triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 12 m. Por el vértice C se traza $\overline{CD}$ perpendicular al plano que contiene dicho triángulo. Si el ángulo entre los planos determinados por ABD y ABC es 60°, entonces la distancia de C al plano ABD, en metros, es

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Resolución 39

Geometría del espacio

Piden: h



Trazamos $\overline{CT} \perp \overline{MD}$

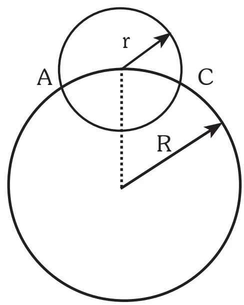
⇒ ◺CTM: notable (30° y 60°)

∴ $\underline{h = 9}$

Rpta: 9

Pregunta 40

Se tiene la siguiente figura formada por dos círculos de radios R y r (r = R/2). Determine la longitud de arco de circunferencia $\overset{\frown}{AC}$.



A) $2r.\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

B) $2r.\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

C) $4r.\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

D) $4r.\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

E) $6r.\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

Resolución 40

Resolución de triángulos oblicuángulos

Según el enunciado podemos considerar dos casos:

Caso I: $\ell_{\widehat{AC}} = \ell_{\widehat{AO_2C}}$

En el triángulo AO_2O_1 por teorema de cosenos:

$$\text{Cos}\theta = \frac{4r^2 + 4r^2 - r^2}{2(2r)(2r)} = \frac{7}{8}$$

$$\Longrightarrow \text{Sen}\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

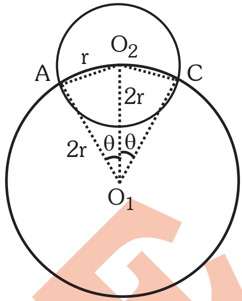
$$\theta = \text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$$

Luego:

$$\ell_{\widehat{AC}} = \ell_{\widehat{AO_2C}}$$

$$\ell_{\widehat{AC}} = (2\theta)(2r)$$

$$= 4r.\text{arcsen}\left(\frac{15}{8}\right)$$



Rpta: 4r.arcsen($\frac{\sqrt{15}}{8}$)

Caso II:

Considerando:

$\ell_{\widehat{AC}} = \ell_{\widehat{ABC}} = (2\alpha).r$ .... (1)

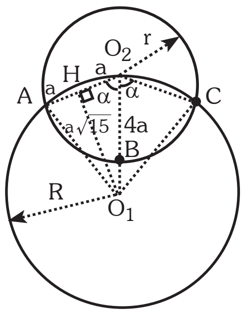
del triángulo HO_2O_1:

$$\text{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

En (1):

$$\ell_{\widehat{AC}} = 2r.\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$



Rpta: 2r.arcsen($\frac{\sqrt{15}}{4}$)