Pregunta 01

Semanalmente, un trabajador ahorra cierta cantidad en soles, y durante 40 semanas ahorra las siguientes cantidades:

21	35	29	31	23	22	28	33
28	25	31	26	24	27	27	33
37	29	19	36	23	18	46	12
26	41	30	18	39	15	24	4
25	33	10	28	20	27	17	31

Se construye una tabla de frecuencias de 7 intervalos de igual longitud fija A. Si F_5 es la frecuencia acumulada del quinto intervalo (ordenados los extremos de los mismos de forma creciente), determine el valor de $(A+F_5)-1$

A) 30
B) 32
C) 37
D) 38
E) 39

Resolución 01

Estadística

Tabla de distribución de frecuencias

Sabemos que:

(alcance) = [Dato menor; Dato mayor]

(rango) = (Dato mayor) – (Dato menor)

$$\underbrace{(\text{Ancho de clase})}_{A}=\frac{(\text{Rango})}{(\#\ \text{intervalos})}$$

Dato: (# intervalos) = 7

(Alcance) = [4; 46]

(Rango) = 46-4 = 42

$$A=\frac{42}{7}=6$$

Tabla de Frecuencias

Intervalos	f_i	F_i
[4,10>	1	1
[10,16>	3	4
[16,22>	6	10
[22,28>	12	22
[28,34>	12	34
[34,40>	4	38
[40,46]	2	40

Pide:

$$(\underset{\substack{\uparrow\\6}}{A}+\underset{\substack{\uparrow\\34}}{F_5})-1=39$$

Rpta: 39

Pregunta 02

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. Sean $A \subset B \subset C \subset D$, entonces la probabilidad
$P(D)=P(D\setminus A)+P(C\setminus A)+P(B\setminus A)+P(A)$

II. Se lanzan dos dados normales, entonces la probabilidad que su suma sea 7 es $\frac{1}{12}$.

III. Se lanzan dos dados normales, uno cada vez, entonces la probabilidad de que salga 3 dado que antes salió 1 es $\frac{1}{36}$.

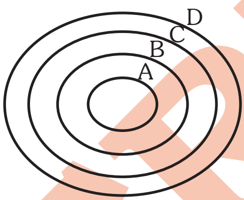
A) V V V
B) V F V
C) F V V
D) F F V
E) F F F

Resolución 02

Probabilidades

Probabilidad condicional

I. Sean los eventos: $A \subset B \subset C \subset D$, entonces



$P(D)$: $P(D \backslash A)+P(B \backslash A)+P(A)$......(F)

Porque $P(D)=P(D \backslash C)+P(C \backslash B)+P(B \backslash A)+P(A)$

II. A={obtener una suma 7, al lanzar dos dados normales}

$A=\{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$

$\therefore P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

la proposición $P(A)=\frac{1}{12}$ es falsa (F)

III. Piden la probabilidad de obtener el evento: Obtener 3 dado que antes salió 1.

$E=\{(1,3)\}$ $\quad P(E)=\frac{1}{6}$

$\therefore$ La proposición $P(E)=\frac{1}{36}$.....(F)

Recuerde que:

El espacio muestral se reduce a 6 casos, para el 2do dado.

Rpta: F F F

Pregunta 03

Sabiendo que $K = \overline{ab}_{(4)} = \overline{cd}_{(5)}$ y $a+b+c+d=11$ en el sistema decimal con $a \neq 0$, $c \neq 0$. Determine K en el sistema decimal.

A) 14
B) 23
C) 32
D) 41
E) 51

Resolución 03

Numeración

Cambio de base

$K = \overline{ab}_{(4)} = \overline{cd}_{(5)}$

Los números que se representan con dos cifras tanto en base 4, como en base 5 son del:

{5, 6, 7, ... , 15} y de estos el número 14 cumple que: $\underset{\displaystyle K}{\underset{\downarrow}{14}} = 32_{(4)} = 24_{(5)}$

donde: $a + b + c + d = 11$ (DATO)

$\quad\quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 4$

$\therefore K= 14$

Rpta.: 14

Pregunta 04

Se sabe que en una división entera el divisor es 50 y el residuo es 15. ¿Cuántas unidades como mínimo se le debe disminuir al dividendo, para que el cociente disminuya en 13 unidades?

A) 614
B) 615
C) 616
D) 617
E) 618

Resolución 04

Cuatro operaciones

División

Sea la división original

$$\begin{array}{l|l} D & 50 \\ \hline 15 & q \end{array} \rightarrow D=50q+15$$

- Luego:

$$\begin{array}{l|l} D\text{-}X_{MÍN} & 50 \\ \hline R & q\text{-}13 \end{array}$$

$$\underbrace{D}_{50q+15} - X_{MÍN} = 50(q-13)+R$$

$$50q+15-X_{MÍN} = 50q-650+R$$

$$665 - \underset{\underset{49\ (MÁX)}{\downarrow}}{R} = X_{MÍN}$$

$$\underbrace{\qquad}_{616} = X_{MÍN}$$

Rpta.: 616

Pregunta 05

Sea el número $E = 2^{2001} + 3^{2001}$. Calcule el residuo de dividir E entre 7.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 05

Divisibilidad

Restos potenciales

$E=2^{2001}+3^{2001}$

$E=(2^3)^{667}+(3^3)^{667}=8^{667}+27^{667}$

Aplicando cocientes notables esta expresión siempre será divisible por la suma de: $8+27=35$

$$\therefore E = 8^{667}+27^{667} = \overset{o}{35} < \begin{matrix}\overset{o}{5}\\ \overset{o}{7}\end{matrix}$$

$$\boxed{E=\overset{o}{7}} \rightarrow \text{Resto} = 0$$

Rpta.: 0

Pregunta 06

¿Cuántos números de la forma $\overline{(4a\text{-}3)(3b)(4a\text{-}3)}$ son primos?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 06

Números primos y compuestos

Clasificación de los Z+

Sabemos que:

Un número es primo, si solo posee 2 divisores, la unidad y el mismo número.

Ejemplo:

- 2 es primo, ya que sus divisores son 1 y 2
- 19 es primo, ya que sus divisores son 1 y 19

Dato: $\overline{(4a\text{-}3)(3b)(4a\text{-}3)}$ es primo.

1	0	1	
1	3	1	
1	5	1	
1	8	1	
1	9	1	
3	1	3	Hay 15 primos
3	5	3	capicúas de 3
3	7	3	cifras
3	8	3	Rpta: 15
7	2	7	∴ No hay
7	5	7	Clave
7	8	7	
7	9	7	
9	1	9	
9	2	9	

Nota: Asumiento a, b ∈ Z.

$\overline{(4a\text{-}3)\ (3b)\ (4a\text{-}3)}$

$\overline{(\overset{\circ}{4}-3)\,\overset{\circ}{3}\,(\overset{\circ}{4}-3)}$

1	0	1	Hay 3 primos
1	3	1	que cumplen
1	9	1	

Rpta: 3

Sí hay clave

Rpta.: 3

Pregunta 07

Sea la expresión

$0,a\widehat{b}-0,b\widehat{a}=0,4\widehat{4}$; con b≠ 0

Entonces la suma de todos los valores posibles de $0,a\widehat{b}$ que satisfacen la ecuación anterior es

A) $0,6\widehat{1}$

B) $1,3\widehat{3}$

C) $2,1\widehat{6}$

D) $3,1\widehat{1}$

E) $4,16$

Resolución 07

Números racionales

Números decimales

$0,a\widehat{b}-0,b\widehat{a}=0,\widehat{4}$

$$\frac{(\overline{ab}-a)}{90}-\frac{(\overline{ba}-b)}{90}=\frac{4}{9}$$

$$\frac{(9a+b)}{90}-\frac{(9b+a)}{90}=\frac{4}{9}$$

$$\frac{8a-8b}{90}=\frac{4}{9}$$

a – b=5

6 1
7 2
8 3
9 4

Luego piden la suma de valores de $0,a\widehat{b}$

$$\underbrace{0,6\widehat{1}+0,7\widehat{2}+0,8\widehat{3}+0,9\widehat{4}}_{3,\widehat{1}=3,1\widehat{1}}$$

Rpta: $3,1\widehat{1}$

Pregunta 08

Se tiene la siguiente igualdad

$$\left(\overline{aaa1}_{(9)}\right)^{1/3}=\overline{1(a+2)}_{(9)}$$

Entonces podemos decir que el conjunto

$$\left\{a\in\{1,2,3,...8\}/\left(\overline{aaa1}_{(9)}\right)^{1/2}\text{ existe}\right\}$$

A) No posee elementos
B) Posee un solo elemento
C) Posee dos elementos
D) Posee tres elementos
E) Posee cuatro elementos

Resolución 08

Potenciación

Cubo perfecto

$$\underbrace{\overline{aaa1}_{(9)}}=\left(\overline{1(a+2)}_{(9)}\right)^3$$

$$\overset{o}{9}+1 \quad = \quad (\overset{o}{9}+(a+2))^3$$

$$\downarrow$$

$$2$$

$$5$$

- Luego
- Si: a = 2

$$\underbrace{2221_{(9)}}_{1639}=\underbrace{(14_{(9)})}_{2197}{}^3 \quad \text{(no cumple)}$$

$$1639 \neq 2197$$

- Si: a = 5

$$\underbrace{5551_{(9)}}_{4096}=\underbrace{(17_{(9)})}_{4096}{}^3$$

$$4096 = 4096 \quad \text{(sí cumple)}$$

- Luego: el conjunto es unitario.

$$\{5\}$$

Rpta.: Posee un solo elemento

Pregunta 09

Indique el intervalo al cual pertenece el valor de m, para que la inecuación

$$\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m$$

Se cumpla para todo $x\in\mathbb{R}$.

A) $\left\langle-\infty,-\frac{13}{3}\right\rangle$

B) $\langle 1,+\infty\rangle$

C) $\langle 2,+\infty\rangle$

D) $\langle 3,9\rangle$

E) $\langle 5,+\infty\rangle$

Resolución 09

Inecuaciones

Desigualdades

$$\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m;\ \forall x\in R$$

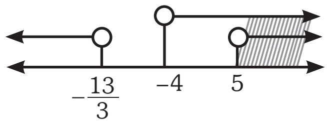
$$O<\underbrace{(m+4)x^2-(m+1)x+(m-4)}_{P(x)};\ \forall x\in R$$

$\leftrightarrow m+4>0 \ \wedge \ \Delta < 0$

$m>-4 \ \wedge \ (m+1)^2-4(m+4)(m-4)<0$

$0<3m^2-2m-65$

$0<(3m+13)(m-5)$



$\therefore m\in\langle 5;\infty\rangle$

Rpta: <5,+∞>

Pregunta 10

Sea una función f: $\mathbb{R}\rightarrow<0,+\infty>$ que cumple $f(a+b)=f(a).f(b)$ $\forall a,\ b\in\mathbb{R}$. Calcule el valor de $f(a).f(-a)$

A) –1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Resolución 10

Funciones

Regla funcional

Dato: $f(a+b)=f(a)\,f(b);\ \forall a;\ b\in\mathbb{R}$

Para $a=0;\ b=0$

$f(0)=f(0).f(0)$

pero $f(0)>0 \ \rightarrow \ f(0)=1$

Para $b=-a$

$f(0)=f(a)\ f(-a)=1$

Rpta: 1

Pregunta 11

Considere la siguiente función: f: R→R definida por $f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0,\ b>0$.

Si: $f(0)=2$ y Rang (f) $=[b\,;+\infty\rangle$, determine el siguiente valor $M=\dfrac{8a-b^2}{ab}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 11

Funciones

Función cuadrática

Dado: $f(x)=ax^2+bx+c;\ a>0$

$\rightarrow f(0)=c=2$

Se sabe:

$f\min=-\dfrac{\Delta}{4a}=b$

$-(b^2-8a)=4ab$

$8a-b^2=4ab$

Reemp. en M:

$M=\dfrac{4\cancel{ab}}{\cancel{ab}}=4$

Rpta: 4

Pregunta 12

Sea f una función cuya regla de correspondencia está dada por: $f(x) = \log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Encuentre su función inversa

A) $a^x + a^{-x}$

B) $\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

C) $a^x - a^{-x}$

D) $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

E) $\dfrac{a^x}{2}$

Resolución 12

Funciones

Función inversa

$y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Notamos que la función es creciente, luego la inversa existe.

- Despejando "x"

$$x+\sqrt{x^2+1}=a^y$$
$$\sqrt{x^2+1}=a^y-x$$
$$\cancel{x^2}+1=a^{2y}-2a^yx+\cancel{x^2}$$
$$2a^yx=a^{2y}-1$$
$$x=\frac{a^y-a^{-y}}{2}$$
$$\therefore f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

Rpta: $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

Pregunta 13

Si A es una matriz invertible, despeje la matriz X a partir de la expresión.

$((AX)^{-1})^t = 0,5\ B^{-1}$

A) $X = 0,5\ A^{-1}B^t$

B) $X = 0,5\ B^t A^{-1}$

C) $X = 2\ A^{-1}B$

D) $X = 2\ B^{-1} A^t$

E) $X = 2\ A^{-1} B^t$

Resolución 13

Matrices

Matriz inversa

$[(AX)^{-1}]^t=0,5B^{-1}$

Tomando la transpuesta

$(AX)^{-1}=0,5B^{-t}$

Aplicando la inversa

$$AX=(0,5B^{-t})^{-1}$$
$$AX=2B^t$$

Multiplicando por A^{-1}

$$A^{-1}.AX=A^{-1}.2B^t$$
$$X=2A^{-1}B^t$$

Rpta: $X=2\ A^{-1}\ B^t$

Pregunta 14

Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x^2-2x-y+1=0 \end{cases}$$

A) {(3,1), (1,1), (-1,-1)}
B) {(2,-2), (2,1), (1,1)}
C) {(-1,0), (1,1) (1,2)}
D) {(1,0), (0,1), (2,1)}
E) {(1, -1), (1,0), (2,-1)}

Resolución 14

Sistema de ecuaciones

Sistema no lineales

de (2):

$$(x-1)^2=y$$

en (1):

$$\underbrace{(x-1)^2}+y^2-2y=0$$
$$y+y^2-2y=0$$
$$y^2-y=0$$

$$\begin{array}{lcl} y=0 & \vee & y=1 \\ (x-1)^2=0 & & (x-1)^2=1 \\ x=1 & & x-1=1 \quad \vee \quad x-1=-1 \\ & & x=2 \quad \vee \quad x=0 \end{array}$$

$\therefore$CS= {(1;0);(2;1);(0;1)}

Rpta.: {(1,0),(0,1),(2,1)}

Pregunta 15

Un granjero tiene 480 acres de tierra en la que puede sembrar maíz o trigo. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación de verano. En el caso del maíz, el trabajo demora 2 horas por acre y se obtiene una utilidad de S/.40 por acre, mientras que en el trigo el trabajo es de 1 hora por acre y la utilidad es de S/.30 por acre. ¿Cuántos acres de maíz y trigo debe plantar respectivamente, para maximizar su utilidad?

A) (160, 320)
B) (140, 340)
C) (340, 140)
D) (320, 160)
E) (180, 300)

Resolución 15

Programación lineal

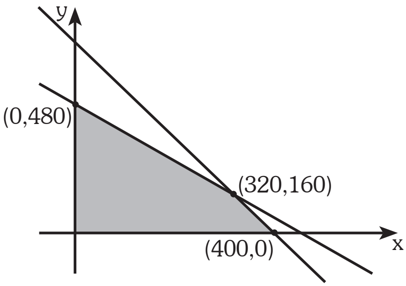
Máximos y mínimos

Por datos:

	Maíz	Trigo	Total
Acre	x	y	480
Horas	2x	y	800
Utilidad	40x	30y	

$$U_{(x;y)}=40x+30y$$

$$S=\begin{cases} x+y\leqslant 480 \\ 2x+y\leqslant 800 \\ x\geqslant 0\,;\,y\geqslant 0 \end{cases}$$



$$U_{máx} = 40(320) + 30(160)$$
$$= 12800 + 4800$$
$$= 17600$$

Rpta: Debe plantar 320 acres de maíz y 160 acres de trigo

Rpta.: (320, 160)

Pregunta 16

Considere la sucesión

$$\left\{1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right\}.$$

Determine el menor valor de $n \in \mathbb{N}$, de modo que se cumpla

$$\frac{1}{n^2} < 1 \times 10^{-7}$$

A) 2081
B) 2091
C) 2991
D) 3001
E) 3163

Resolución 16

Sucesiones

Sucesión acotada

$$\frac{1}{n^2} < 10^{-7} \rightarrow n^2 > 10^7$$
$$\rightarrow n > 10^3\sqrt{10} \rightarrow n > 3162{,}2\dots$$

$\rightarrow$ Menor valor; $n \in \mathbb{N}$: 3163

Rpta: 3163

Pregunta 17

Halle el menor grado del polinomio x^n+ax+b, $a \neq 0$, $(n>1)$ para que x^2-1 sea un divisor.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución 17

Polinomios

Divisibilidad

Si $P(x)=x^n+ax+b$ es divisible (x^2-1)

$\rightarrow P(x)=(x^2-1)q(x)$

$$\underbrace{P(1)=0}_{1+a+b=0\dots(1)} \quad \wedge \quad P(-1)=0$$

$$1+a+b=0\dots(1) \qquad (-1)^n-a+b=0\dots(2)$$

Restando (1) y (2)

$1-(-1)^n+2a=0$

$2a=(-1)^n-1$

Se tiene $a \neq 0 \rightarrow (-1)^n-1 \neq 0$

entonces n es impar

$\min(n)=3$

Rpta: 3

Pregunta 18

En el primer cuadrante del plano se forma el conjunto A con los puntos con coordenadas enteros positivos, esto es

$$A=\{(m,n)/m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}.$$

A cada punto (m,n) de A se le asigna el valor $\frac{1}{2^{m+n}}$. Calcule la suma de todos los valores de los puntos (m,n) de A con coordenadas $m\geq n$.

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{2}{3}$
C) 1
D) 2
E) $+\infty$

Resolución 18

Series

Convergencia

- Sea S_m la suma de todos los valores de los puntos (m;n) con coordenadas $m\geq n$

$$S_m=\sum_{n=1}^{n=m}\frac{1}{2^{m+n}}=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\frac{1}{2^{m+3}}+.....+\frac{1}{2^{m+n}}$$

$$S_m=\frac{1}{2^m}\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^m}\right)}_{1-\frac{1}{2^m}}=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{2m}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}S_m=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{4^m}\right)=$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Rpta: $\frac{2}{3}$

Pregunta 19

Si S es el conjunto solución de la inecuación $\sqrt{|x+1|-|x-2|}<2$ se afirma

I. $<1/4,+\infty>\subset S$
II. $S\subset<1/3,+\infty>$
III. $S\cap<-\infty,1/2>\neq\phi$

¿Cuáles son afirmaciones correctas?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) II y III

Resolución 19

Inecuaciones

Valor absoluto

$$0\leq|x+1|-|x-2|<4$$

$|x-2|\leq|x+1|$ $\quad\wedge\quad$ $\underbrace{|x+1|}_{\downarrow}-|x-2|<4$

elevando al cuadrado

$x\geq\frac{1}{2}$

$x+1-|x-2|<4$

$|x-2|>x-3$

$x-2>x-3\vee x-2<-x+3$

$x\geq\frac{1}{2}\wedge(x\in R\vee x<5/2)$

luego $CS=\left[\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$

analizando las proposiciones

I. F
II. V
III. F

Solo II es correcta

Rpta: Solo II

Pregunta 20

Respecto a la función $f(x)=|x|-x$, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $f(x+y)\leq f(x)+f(y);\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

II. Si hacemos $g(x)=x^2-2x-3$ entonces el conjunto solución de $g(x)=f(x)$ es $\{-\sqrt{3},3\}$.

III. Si hacemos $h(x)=x^2-3x+5$ entonces el conjunto solución de $h(x)=f(x)$ es vacío.

A) V F V
B) V F F
C) V V V
D) F V V
E) F V F

Resolución 20

Funciones

Regla de correspondencia

$f(x)=|x|-x$

I. $f(x+y)=|x+y|-(x+y)$

Sabemos $\forall x,y\in\mathbb{R}: |x+y|\leq|x|+|y|$

$$\underbrace{|x+y|-(x+y)}_{f(x+y)}\leq\underbrace{|x|-x}_{}+\underbrace{|y|-y}_{}$$

$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ **(V)**

II. $g(x)=x^2-2x-3=|x|-x$

- $x>0\wedge x^2-2x-3=0\Rightarrow x=3$
- $x<0\wedge x^2-2x-3=-x-x\Rightarrow x=-\sqrt{3}$

C. S.$=\{-\sqrt{3},3\}$ **(V)**

III. $x^2-3x+5=|x|-x$

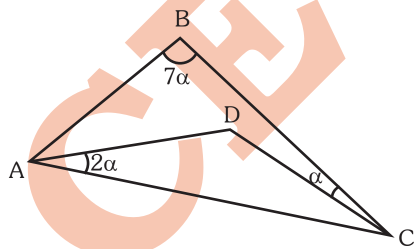
- $x>0\wedge x^2-3x+5=0\Rightarrow x\in\phi$
- $x<0\wedge x^2-3x+5=-2x\Rightarrow x\in\phi$

C. S.$=\phi$ **(V)**

Rpta: V V V

Pregunta 21

En el gráfico AB = AD = DC, calcule α (en grados)



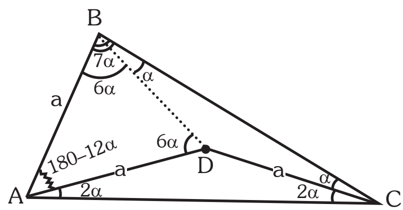
A) 8
B) 9
C) 10
D) 12
E) 13

Resolución 21

Triángulos

Propiedades

Piden: α



* $m\widehat{DCA}=2\alpha$.

* Δ ABD: $m\widehat{BAD} = 180 - 12\alpha$
* En Δ Isósceles ABD: $m\widehat{ABD} = m\widehat{ADB}$ $= 6\alpha \Rightarrow \widehat{DBC} = \alpha$

Luego: $BD = DC = \alpha$

$\therefore$ Δ ABD Equilátero

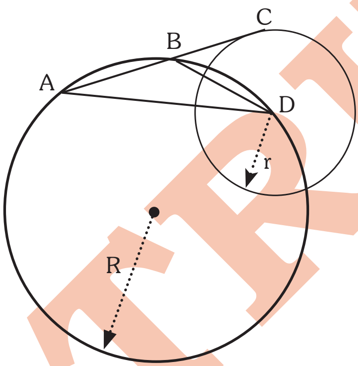
$6\alpha = 60$

$\therefore$ $\alpha = 10$

Rpta.: 10

Pregunta 22

En la figura las circunferencias tienen radios r =3u y R =6u respectivamente, C es punto de tangencia y D es centro. Calcule producto DA.DB (en u^2).



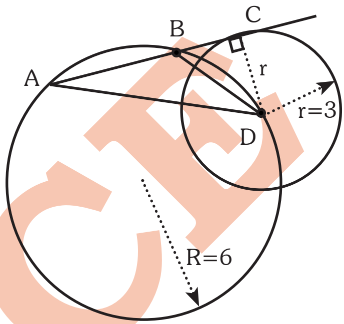
A) 18
B) 24
C) 30
D) 36
E) 40

Resolución 22

Semejanza

Semejanza de triángulos

Piden: DA . DB



Por el teorema de producto de lados en el Δ ABD.

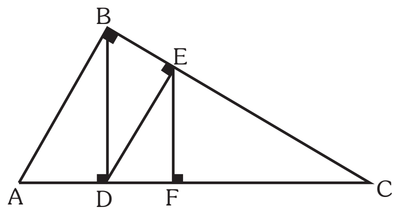
$(AD)(DB) = 2Rr = 2(6)(3)$

$\therefore$ $(AD)(DB) = 36$

Rpta.: 36

Pregunta 23

En la figura se muestra el triángulo rectángulo ABC recto en B. Si AB = 5 cm y AD=3cm, entonces la medida (en cm) del segmento $\overline{EF}$ es:

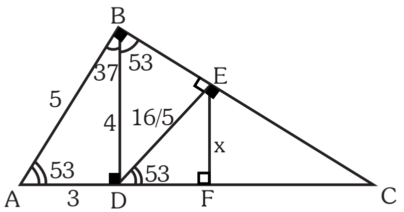


A) 2,14
B) 2,16
C) 2,25
D) 2,56
E) 2,82

Resolución 23

Triángulos

Triángulo notable



Piden: x

◺BED (NOT 53° y 37°)

$$DE=\frac{16}{5}$$

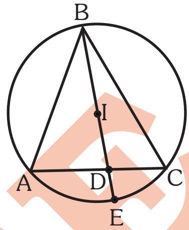
◺DFE(NOT 53° y 37°)

$$x=\frac{64}{25}=2,56$$

Rpta: 2,56

Pregunta 24

En la siguiente figura, I es el incentro del triángulo ABC, BI = 6u, DE = 1u. Calcule BE (en u).

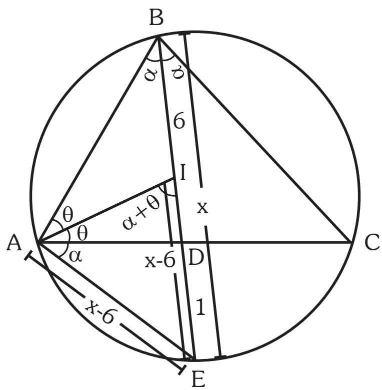


A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

Resolución 24

Semejanza y puntos notables

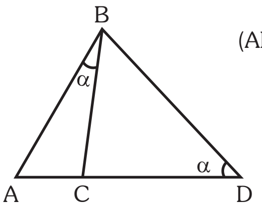
Propiedades



Piden x

I: Incentro del Δ ABC

Por teorema



$(AB)^2 = (AD)(AC)$

En el Δ ABE

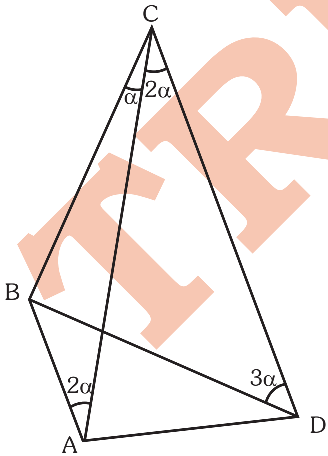
$(x - 6)^2 = x.1$

$\therefore\ x=9$

Rpta.: 9

Pregunta 25

En la figura AC=CD, AD= 6u y área (ΔBCD)=r (área ΔABD). Halle r.



A) $1+\sqrt{3}$

B) $2+\sqrt{3}$

C) $2-\sqrt{3}$

D) $1+2\sqrt{3}$

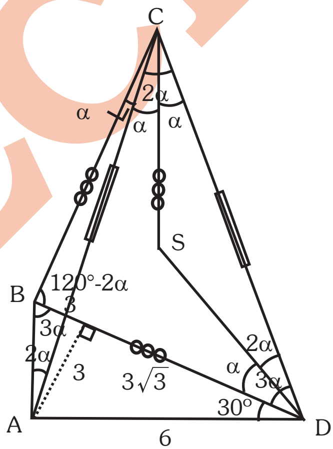
E) $2\sqrt{3}-1$

Resolución 25

Áreas

Áreas de regiones triangulares

Piden: r



Dato: Área(ΔBCD)=Área(ΔABC)

Calculando: α

sea: $\Delta CSD \cong \Delta CBA$

Por teorema

$m\sphericalangle CBD=120°-2\alpha$

$\rightarrow \alpha=15°;\ m\sphericalangle BDA=30$

Del dato:

$$\frac{(3+3\sqrt{3})^2}{2}=\frac{r(3+3\sqrt{3})3}{2}$$

$\therefore\ r=1+\sqrt{3}$

Rpta: $1+\sqrt{3}$

Pregunta 26

ABCD es un cuadrado y desde su centro O se traza un segmento $\overline{OE}$ perpendicular al plano ABC, si OE=AB entonces la medida del diedro E–DC–B es:

A) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

B) $\arctan(1)$

C) $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

D) $\arctan(2)$

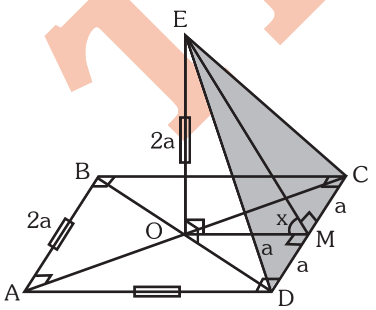
E) $\arctan\left(\frac{5}{2}\right)$

Resolución 26

Geometría del espacio

Ángulo diedro

Piden: x



En el ◺ EOM:

x=arc tg(2)

Rpta: arc tan(2)

Pregunta 27

El punto P se encuentra situado sobre la altura de un tetraedro regular de lado a. Si P equidista de cada vértice, calcule esta distancia.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

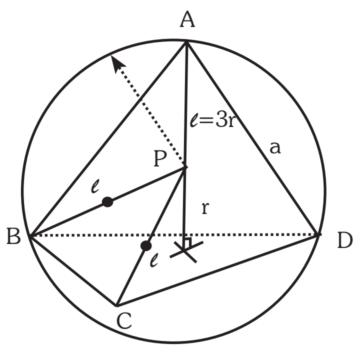
E) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Resolución 27

Poliedros regulares

Volumen

Piden: PA



Dato: PA=PB=PD=PC

Consecuencia: “P” centro de la esfera circunscrita al tetraedro regular, r: inradio.

$$\Longrightarrow 4r = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow 3r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore\ PA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Rpta: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Pregunta 28

Un vaso de forma de prisma recto hexagonal, con diagonal mayor de la base que mide 6 cm, contiene agua “al tiempo”. Para enfriarla se coloca un cubo de hielo y se observa que el nivel del agua sube 2 cm. Calcule la longitud de la arista del cubo de hielo (en cm).

A) 3

B) $3\sqrt[6]{3}$

C) $3\sqrt[4]{3}$

D) $3\sqrt[3]{3}$

E) $3\sqrt{3}$

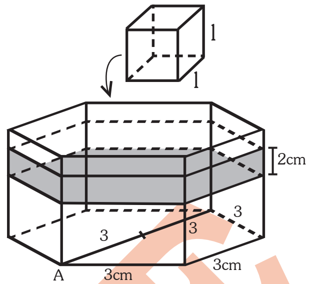
Resolución 28

Prismas

Volumen

Piden: l

El volumen del cubo es equivalente al volumen del agua que sube 2 cm,



$V_{Cubo}=l^3$ $\qquad V_{Prisma}=6\left(\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\right).2$

$l^3=6.\frac{9\sqrt{3}}{4}.2 \quad \Rightarrow \quad l^3=27\sqrt{3}$

$l=3\sqrt[6]{3}$

Rpta.: $3\sqrt[6]{3}$

Pregunta 29

En un cilindro de revolución de 5 cm de altura se inscribe un paralelepípedo rectangular con superficie lateral de 250 cm^2. Una de sus aristas, ubicada en la base del cilindro, mide 16 cm. Calcule la razón (en cm) entre el volumen y el área lateral del cilindro.

A) $\frac{\sqrt{337}}{4}$

B) $\frac{\sqrt{337}}{2}$

C) $\frac{337}{4}$

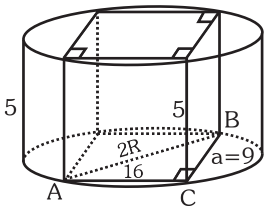
D) $\frac{337}{2}$

E) $\sqrt{337}$

Resolución 29

Prisma – Cilindro

Volumen – Área



Piden: $\dfrac{V_C}{A_L}$

Dato: $A_L=250$

$2[16.5+5a]=250$

$a=9$

- En el ⊿ ABC
- $2R=\sqrt{337}$

$V_{Cilindro}=\pi R^2.5$

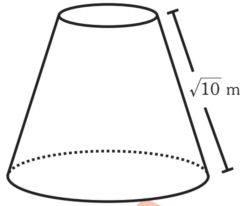
$A_L=2\pi R.5$

$\dfrac{V_C}{A_L}=\dfrac{\sqrt{337}}{4}$

Rpta: $\dfrac{\sqrt{337}}{4}$

Pregunta 30

En la Panamericana cerca de Casma se ha formado una duna en forma de tronco de cono de revolución. Las longitudes de las circunferencias son 4 π m y 2 π m. Ver figura. Halle el volumen de la duna en metros cúbicos.



A) 3 π

B) 5 π

C) 7 π

D) 10 π

E) 11 π

Resolución 30

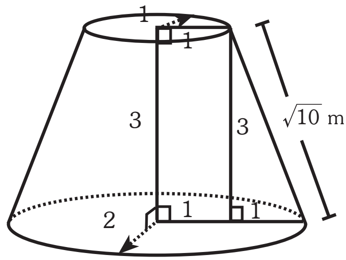
Tronco de cono

Volumen

Piden: V_{tronco}

$$V_{tronco}=\frac{\pi 3}{3}(1^2+2^2+2.1)$$

$\therefore V_{tronco}=7\pi$



Rpta: 7π

Pregunta 31

En un tronco de cono de revolución, el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Si el volumen del tronco de cono es 336π cm^3 y el radio de la base menor es 6 cm, entonces el volumen de una esfera tangente a las bases del tronco de cono (en cm^3) es:

A) $\frac{30}{3}\pi$

B) $\frac{31}{3}\pi$

C) $\frac{32}{3}\pi$

D) $\frac{33}{3}\pi$

E) $\frac{34}{3}\pi$

Resolución 31

Sólidos geométricos

Tronco de cono

Piden: V_{esfera}

Dato $V_{TC}= 336\pi$

$$\frac{\pi h}{3}\left(6^2+12^2+12\,.\,6\right)=336\pi$$

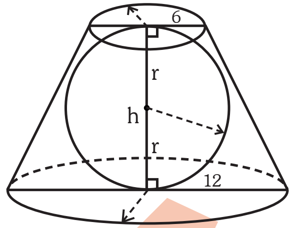
$$h= 4$$

$$2r= 4$$

$$r= 2$$

$$V=\frac{4}{3}\pi(2)^3$$

$$\therefore V=\frac{32}{3}\pi$$



Rpta.: $\frac{32}{3}\pi$

Pregunta 32

En una pirámide cuadrangular regular, la arista básica mide 8 u y su altura mide 15 u. ¿A qué distancia (en u) de la base de la pirámide se debe trazar un plano paralelo a dicha base, para que el volumen del prisma recto, que tiene por base a dicha sección y por altura la distancia de la sección al vértice de la pirámide, sea los $\frac{3}{8}$ del volumen de la pirámide?

A) 9,5

B) 8,5

C) 7,5

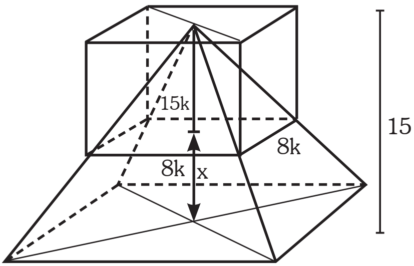
D) 6,5

E) 5,5

Resolución 32

Pirámide

Semejanza de pirámides



Piden: x

Condición

$V_{\text{prisma}}=\frac{3}{8}V_{\text{pirámide}}$

$8k.8k.15k=\frac{3}{8}.\frac{(8.8.15)}{3}$

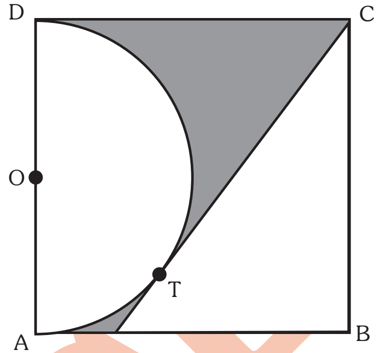
$k=\frac{1}{2} \qquad 15k=\frac{15}{2}$

$\therefore\ x=\frac{15}{2}$

Rpta: 7,5

Pregunta 33

Si ABCD es un cuadrado de lado 2u y T es un punto de tangencia, entonces el área sombreada (en u^2) es igual a: (O centro de la circunferencia que pasa por A, T y D)

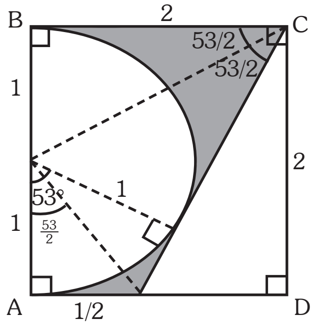


A) 0,57
B) 0,68
C) 0,79
D) 0,81
E) 0,92

Resolución 33

Áreas

Áreas circulares



Pide: área sombreada

$$A_{\underset{\text{SOMB}}{\text{REG}}}=\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\cancel{2}}.\cancel{2}-\frac{\pi(1)^2}{2}$$

$$A_{\underset{\text{SOMB}}{\text{REG}}}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}=0{,}92$$

Rpta: 0,92

Pregunta 34

En todo triángulo ABC, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a K(bc cosA+ac cosB+ab cosC) donde K vale:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

D) 2

E) 4

Resolución 34

Resolución de triángulos oblicuángulos

Teorema de coseno

Por condición:

$a^2+b^2+c^2=$ k(bc CosA+ac CosB+ab CosC)

$$\text{Por teoría: }\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\,\text{CosA}\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\,\text{CosB}\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\,\text{CosC}\end{aligned}\right\}\text{sumando}$$

2bc CosA+2ac CosB+2ab CosC$=a^2+b^2+c^2$

Igualando con la condición nos da K= 2

Rpta: 2

Pregunta 35

Al resolver la ecuación

sen (2x)–12(sen(x)–cos(x))+12= 0,

obtenemos como soluciones:

A) $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

B) $2k\pi$ y $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

C) $2k\pi$ y $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

D) $(2k+1)\pi$ y $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

E) $(3k+1)\pi$ y $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Resolución 35

Ecuaciones trigonométricas

De la ecuación

$$\underbrace{1-\text{Sen}2x}+12(\text{Senx}-\text{Cosx})-13=0$$

$$(\text{Senx}-\text{Cosx})^2+12(\text{Senx}-\text{Cosx})-13=0$$

Factorizando:

$$(\text{Senx}-\text{Cosx}+13)(\text{Senx}-\text{Cosx}-1)=0$$

i) Senx - Cosx=-13

no cumple $-\sqrt{2}\le\text{Senx}-\text{Cosx}\le\sqrt{2}$

ii) Senx - Cosx=1 → Senx=1+Cosx

$$2\,\text{Sen}\frac{x}{2}\,\cancel{\text{Cos}}\frac{x}{2}=2\,\text{Cos}^{\cancel{2}}\frac{x}{2}$$

a) Cos $\frac{x}{2}=0$

$$\frac{x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ x=(2k+1)\pi;\ K\in\mathbb{Z}$$

b) tg $\frac{x}{2}=1$

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

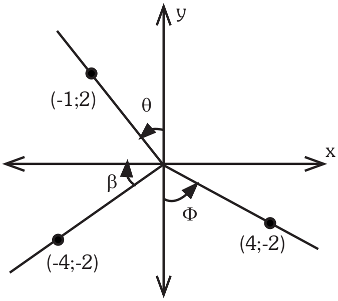
$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2};\ K\in\mathbb{Z}$$

Rpta: $(2k+1)\pi$ y $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Pregunta 36

Del gráfico mostrado, el resultado de:

$E= tg\theta+tg\beta+tg\Phi$, es:



A) –4

B) –2

C) 0

D) 2

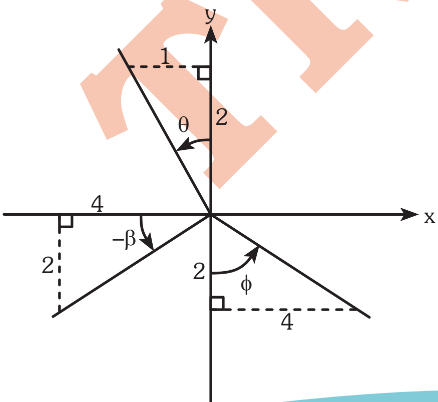
E) 4

Resolución 36

R. T. de un ángulo de cualquier magnitud

Razones trigonométricas

Graficando:



Obtenemos:

$tg\theta= \frac{1}{2}$

$tg(-\beta)= \frac{1}{2} \Rightarrow tg\beta= -\frac{1}{2}$

$tg\phi= \frac{4}{2}=2$

Piden:

$E=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2$

$E= 2$

Rpta: 2

Pregunta 37

Si $x\in\left\langle\pi;\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ entonces determine los valores de $y= 4-9csc^2\left[x+\frac{2\pi}{3}\right]$.

A) $<-\infty,-12>$

B) $<-\infty,-11>$

C) $<-\infty,-10>$

D) $<-\infty,-9>$

E) $<-\infty,-8>$

Resolución 37

Circunferencia trigonométrica

Dato:

$$\frac{5\pi}{3} < x+\frac{2\pi}{3} < \frac{13\pi}{6}$$

Como el seno es creciente

$$Sen\ \frac{5\pi}{3} < Sen(x+\frac{2\pi}{3}) < Sen\ \frac{13\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \text{Sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

$$0 \le \text{Sen}^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{3} < \text{Csc}^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) < +\infty$$

Luego:

$$-\infty < 4-9\text{Csc}^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) < -8$$

Rpta: <–∞,–8>

Pregunta 38

Al simplificar la expresión

$$K=\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\text{sen}(2x))$$

se obtiene:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(2x)$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}^2(2x)$

C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(2x)$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\csc(x)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución 38

I.T. para la suma resta de dos ángulos

Identidades auxiliares

Recordemos:

$\text{Sen}(A+B)\text{Sen}(A-B)=\text{Cos}^2B-\text{Cos}^2A$

Aplicando:

$$K=\left[\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\text{Sen}(-2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\text{Sen}2x)$$

$$K=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Sen}2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\text{Sen}2x)$$

$$K=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\text{Sen}2x)(1-\text{Sen}2x)$$

$$K=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Cos}^2 2x$$

Rpta: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Cos}^2(2x)$

Pregunta 39

Si $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ y $\sqrt{\frac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}}=\tan\left(\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)$

Calcula el valor de (a^2+1)

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Resolución 39

I.T. para el ángulo mitad

De la condición

$$\text{Tg}\left(\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)=\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}=\left|\text{Ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

$\text{Tg}\left(\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)=\left|\text{Tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$ como:

$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}\rightarrow \text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right):(+)$

$\text{Tg}\left(\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)=\text{Tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$a=2$ nos piden a^2+1

$\therefore\ a^2+1=5$

Rpta: 5

Pregunta 40

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\arctan(x)-x}$

Dadas las siguientes proposiciones:

I. La función f es impar.

II. Si $x\in Dom(f)$, entonces $-x\in Dom(f)$.

III. La gráfica de f corta a la curva $y=x^2$

Son correctas:

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) I y II

E) II y III

Resolución 40

Funciones trigonométricas inversas

Hallando el dominio

$ArcTg(x)-x\neq 0$

$ArcTg(x)\neq x \rightarrow x\in <-\infty;0>\cup<0;+\infty>$

Luego:

I. $x\in Domf$ entonces $-x\in Domf$

II. Hallando

$$F(-x)=\frac{(-x)^3}{ArcTg(-x)-(-x)}$$

$F(-x)=F(x)$ es función par

III. $\dfrac{x^3}{ArcTg(x)-x}=x^2 \quad , x\neq 0$

$x= ArcTg(x)-x$

$2x= ArcTg(x)$

$\rightarrow x=0$ pero como $x\neq 0$ no hay solución las gráficas no se cortan

Rpta: Solo II