Pregunta 01

El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Así, un diamante cuyo peso es 1,5 gramos cuesta S/. 18000. Si este diamante se parte en dos pedazos, ¿cuál sería el peso (en gramos) de cada parte para tener un precio total óptimo?

A) 0,3 y 1,2
B) 0,5 y 1
C) 0,6 y 0,9
D) 0,7 y 0,8
E) 0,75 y 0,75

Resolución 01

Magnitudes proporcionales

PRECIO	DP	PESO^2
S/ 18 000	S/. P_1	S/. P_2

$$\boxed{1,5g} = \boxed{x} + \boxed{1,5-x}$$

$$\frac{P_1}{x^2} = \frac{P_2}{(1,5-x)^2} = \frac{18\,000}{(1,5)^2} = 8000$$

$P_1=8000x^2$

$P_2=8000(1,5-x)^2$

Precio total:

$P_1+P_2=8000[x^2+(1,5-x)^2]$

Como:

$$\frac{x+(1,5-x)}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+(1,5-x)^2}{2}}$$

$$0,75 \le \sqrt{\frac{x^2+(1,5-x)}{2}}$$

$$(0,75)^2 x2 \le \sqrt{x^2+(1,5-x)^2}$$

$$(0,75)^2 x2 \le \underbrace{x^2+(1,5-x)^2}_{\substack{\text{Tiene un mínimo} \\ \text{cuando } x=0,75. \\ \text{(no tiene máximo)}}}$$

$\therefore$ x= 0,75g$\rightarrow$ w_1= 0,75g

w_2= 1–0,75= 0,75g

OBS: De las alternativas la recaudación mayor se obtiene para w_1= 0,3 y w_2= 1,2g; sin embargo estamos considerando w_1= w_2= 0,75g como pesos óptimos para que ambos tengan las mismas posibilidades de venta.

Rpta.: 0,75 y 0,75

Pregunta 02

20 escolares asisten al centro recreacional Huampaní, los cuales llevan celular, cámara o ambos. Se sabe que 5 escolares llevan ambos accesorios y la proporción de escolares con solo cámara es a los escolares con solo celulares como 1 es a 2.

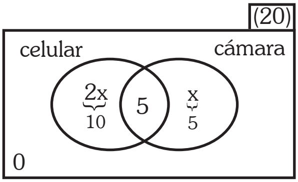
Se forman grupos de 5 estudiantes para competir en diversos juegos. ¿De cuántas maneras se pueden formar los grupos que tengan un accesorio solamente del mismo tipo?

A) 250
B) 251
C) 252
D) 253
E) 254

Resolución 02

Análisis combinatorio

Combinaciones



Luego

$2x+5+x=20$

$x=5$

Formamos grupos de 5 estudiantes que tienen solo un accesorio.

$$\text{N° de maneras} = \begin{pmatrix}\text{grupos}\\ \text{con solo}\\ \text{celular}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{grupos}\\ \text{con solo}\\ \text{cámara}\end{pmatrix}$$

$$\text{N° de maneras} = C_5^{10} + C_5^{5}$$

$$\text{N° de maneras} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4\times5}+1$$

$$\text{N° de maneras} = 253$$

Rpta.: 253

Pregunta 03

En un avión, el número $\overline{abc}$ de personas que viajan satisface $150<\overline{abc}<300$, de los cuales $\overline{a0c}$ son hombres y $\overline{ab}$ son mujeres, siendo pasajeros; además, son “c” aeromozas y “a” pilotos. Determina la suma de los dígitos luego de calcular cuántos hombres más que mujeres hay en el avión en total.

A) 9

B) 14

C) 15

D) 16

E) 17

Resolución 03

Cuatro operaciones

Adición

Del enunciado, tenemos que:

$$150<\overline{abc}<300$$
$$a = 1 \text{ ó } 2$$

Además:

$$\begin{array}{lr} \text{N° hombres:} & \overline{a0c}\ + \\ \text{N° mujeres:} & \overline{ab} \\ \text{N° aeromozas:} & c \\ \text{N° pilotos:} & a \\ \hline & \overline{abc} \end{array}$$

Luego:

$\overline{a0c}+\overline{ab}+c+a=\overline{abc}$

$(\cancel{100a}+c)+(10a+b)+\cancel{c}+a=\cancel{100a}+10b+\cancel{c}$

$11a+b+c=10b$

$11a+c=9b$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 7 & 2 & \rightarrow & \overline{abc}=127 \text{ (no cumple)} \\ 2 & 5 & 3 & \rightarrow & \overline{abc}=235 \text{ (sí cumple)} \end{array}$$

Piden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{total}\\ \text{hombres}\end{pmatrix}}_{(205+2)} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{total}\\ \text{mujeres}\end{pmatrix}}_{23+5} = 207-28=\underline{179}$$

$$(\Sigma\text{cif})=1+7+9=17$$

Rpta.: 17

Pregunta 04

Determina el valor de (a+b+c), si:

$$\overline{a1a}+\overline{a2a}+\overline{a3a}+\ ....\ +\overline{a9a}=\overline{bcd4}$$

A) 12
B) 16
C) 18
D) 20
E) 22

Resolución 04

Cuatro operaciones

Adición

Escribiendo la operación de forma vertical

$$\begin{array}{r} {}^{5}\ \ \\ \overline{a1a}\ + \\ \overline{a2a}\ \ \ \\ \overline{a3a}\ \ \ \\ \vdots\ \ \ \\ \overline{a9a}\ \ \ \\ \hline \overline{bcd4}\ \ \ \\ \downarrow\downarrow\downarrow\ \ \ \ \ \\ 5\ 9\ 0\ \ \ \ \ \end{array} \longrightarrow 9a=\overset{5}{..}4 \quad \underset{6}{\overset{\downarrow}{a}}$$

Piden:

$\underset{6}{a}+\underset{5}{b}+\underset{9}{c}=20$

$\therefore$ 20

Rpta.: 20

Pregunta 05

En la diferencia que se muestra:

$9^{1001}-7^{1001}=\ .....\ a$, donde la cifra de las unidades es "a", halla a^3+a^2+2

A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

Resolución 05

Divisibilidad

Restos potenciales

$9^{1001}=\overset{\circ}{10}+9$, ya que $9^2=81=\overset{\circ}{10}+1$ $\wedge$ $9^{1001}=(9^2)^{500}.9=(\overset{\circ}{10}+1)^{500}.9$

$7^{1001}=\overset{\circ}{10}+7$, porque $7^4=2401=\overset{\circ}{10}+1$ $\wedge$ $7^{1001}=(7^4)^{250}.7=(\overset{\circ}{10}+1)^{250}.7$

Entonces:

$9^{1001}-7^{1001}=(\overset{\circ}{10}+9)-(\overset{\circ}{10}+7)=\overset{\circ}{10}+2$

$9^{1001}-7^{1001}=\ ....a,\quad a=2$

Piden: $a^3+a^2+a=2^3+2^2+2=14$

Rpta.: 14

Pregunta 06

Sea $\overline{ab}$ un número primo mayor que 40. Determina el número de divisores que tiene el número $\overline{ababab00}$.

A) 121
B) 144
C) 288
D) 432
E) 576

Resolución 06

Números primos

Cantidad de divisores

$\overline{ababab00} = 1010100.\overline{ab}$

$= 2^2.3.5^2.7.13.37.\overline{ab}$ (Está descompuesto canónicamente, ya que $\overline{ab}$ es un n° primo mayor que 40.)

Cant. Div. $= (2+1)(1+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$
$= 3 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 2 \;.\; 2 \;.\; 2 \;.\; 2$
$= 288$

Rpta.: 288

Pregunta 07

Sea A un número entero positivo de 10 cifras y $B = \overline{0,abcdefg}$, donde $g \neq 0$.

Del producto AB, se afirma que

I. es un entero.
II. puede ser entero que tiene dos cifras.
III. puede ser un entero con parte entera no nula y parte decimal no nula.

¿Cuáles de estas afirmaciones son verdaderas?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

Resolución 07

Números racionales

Decimales

I. No necesariamente. Ejemplo:

Sea: $A = \overline{xyzw} \;.\; 10^6 \quad (w \neq 0)$
y $\quad B = g \times 10^{-7} \quad (g \neq 0)$

$A \;.\; B = \overline{xyzw} \times g \times 10^{-1}$

Resulta un número decimal exacto con parte entera no nula y parte decimal no nula.

II. Falso

$$10^9 \leq A < 10^{10}$$
$$10^{-7} \leq B < 10^0$$
$$10^2 \leq A \cdot B < 10^{10}$$

mínimo valor 100

III. De "I" se deduce que es verdadero

Rpta.: Solo III

Pregunta 08

Dada la sucesión

$$a_1 = \sqrt{3},\; a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}},\; a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\; a_n = \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3...}}}}_{\text{n radicales}}$$

Calcula: $E = \dfrac{a_{2003} \cdot a^2_{2006}}{a^2_{2004} \cdot a_{2005}}$

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C) 1
D) $\sqrt{3}$
E) 3

Resolución 08

Sucesiones

Regla de correspondencia

Cálculo de la regla de correspondencia:

$$a_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3....}}}$$

$$a_n = \sqrt{3a_{n-1}}$$

entonces: $a_{2004} = \sqrt{3a_{2003}}$; $a_{2006} = \sqrt{3a_{2005}}$

Reemplazando:

$$E = \frac{a_{2003}\cdot[\cancel{\sqrt{}}3a_{2005}]^{\cancel{2}}}{[\cancel{\sqrt{}}3a_{2003}]^{\cancel{2}}a_{2005}} = \frac{a_{2003}\cdot(3.a_{2005})}{(3.a_{2003})\,a_{2005}} = 1$$

Rpta.: 1

Pregunta 09

Sea $\{x; y\}\subset\mathbb{R}$ de modo que:

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$$

El valor de $\dfrac{x+2y}{2x-y}$ es:

A) $\frac{7}{9}$

B) 1

C) $\frac{9}{7}$

D) 2

E) $\frac{19}{7}$

Resolución 09

Operaciones con polinomios

Productos notables

Sabemos si $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4}{a+b} \longrightarrow a=b$

Del problema

$3x - 2y = 2x+3y$

$x = 5y$

Piden:

$$\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{7y}{9y}=\frac{7}{9}$$

Rpta.: $\frac{7}{9}$

Pregunta 10

Una raíz de la ecuación $x^4+mx^2–2(m+2)$ es el triple de otra raíz; entonces, uno de los valores de “m” es:

A) –26

B) –25

C) –20

D) –15

E) –10

Resolución 10

Ecuación polinomial

Ecuación bicuadrada

De la ecuación bicuadrada

$x^4 + mx^2 – 2(m+2) = 0$

se tienen las raíces $\alpha; -\alpha; \beta; -\beta$

Del dato: $\beta = 3\alpha$

Por propiedad:

$\alpha^2 + \beta^2 = -m \quad \wedge \quad \alpha^2\beta^2 = -2(m+2)$

$\alpha^2 + (3\alpha)^2 = -m \quad \alpha^2(3\alpha)^2=-2(m+2)$

$10\alpha^2 = -m \quad 9\alpha^4=-2(m+2)$ .... (2)

$100\alpha^4 = m^2$ .... (1)

Dividiendo (1) y (2), se tiene:

$0= 9m^2 + 200m + 400$

$0= (9m + 20)(m+20)$

$m= -20/9;\ \ m = -20$

Rpta.: –20

Pregunta 11

Sea "f" una función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2+2;\ 0\le x\le 2\\ -(x-4)^2+6;\ 2\le x\le 4\end{cases}$$

Determina la función inversa de "f".

A) $f^*(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x}+2;\ -2\le x\le 2\\ \sqrt{6-x}+4;\ 2\le x\le 6\end{cases}$

B) $f^*(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4}+2;\ 0\le x\le 4\\ \sqrt{6-x}+1;\ 4\le x\le 6\end{cases}$

C) $f^*=\begin{cases}\sqrt{1-x}+2;\ 0\le x\le 1\\ \sqrt{3-x}+4;\ 1\le x\le 3\end{cases}$

D) $f^*(x)=\begin{cases}\sqrt{5x-1}+2;\ 0\le x\le \frac{1}{5}\\ \sqrt{3-x}\ ;\ \frac{1}{5}\le x\le 3\end{cases}$

E) $f^*(x)=\begin{cases}2-\sqrt{2-x};\ -2\le x\le 2\\ 4-\sqrt{6-x};\ 2\le x\le 6\end{cases}$

Resolución 11

Funciones

Función inversa

De la función:

$$f(x)\begin{cases}-(x-2)^2+2;\ 0\le x\le 2\ldots f_1\\ -(x-4)^2+6;\ 2\le x\le 4\ldots f_2\end{cases}$$

Siendo inyectiva, se calcula f^{-1}

- En f_1:

$$y=-(x-2)^2+2$$
$$(x-2)^2=2-y$$
$$\underbrace{|x-2|}_{-}=\sqrt{2-y}$$
$$-(x-2)=\sqrt{2-y}$$
$$x=2-\sqrt{2-y}$$
$$\rightarrow f_1^{-1}=2-\sqrt{2-x}$$

- En f_2:

$$y=-(x-4)^2+6$$
$$(x-4)^2=6-y$$
$$\underbrace{|x-4|}_{-}=\sqrt{6-y}$$
$$-(x-4)=\sqrt{6-y}$$
$$x=4-\sqrt{6-y}$$
$$\rightarrow f_2^{-1}=4-\sqrt{6-x}$$

$$\therefore\ f^{-1}=\begin{cases}2-\sqrt{2-x};\ -2\le x\le 2\\ 4-\sqrt{6-x};\ 2\le x\le 6\end{cases}$$

Rpta.: $f^*(x)=\begin{cases}2-\sqrt{2-x};\ -2\le x\le 2\\ 4-\sqrt{6-x};\ 2\le x\le 6\end{cases}$

Pregunta 12

Señala la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Toda recta en el plano XY representa a una función lineal.

II. Toda función f: A→B sobreyectiva es una función inyectiva.

III. Si $f\subset A\times B$ es una relación tal que para cada par (x,y); $(x,z)\in f$ implica $y=z$, entonces "f" es una función inyectiva.

A) V V V
B) V V F
C) V F F
D) F V F
E) F F F

Resolución 12

Funciones

Definiciones básicas

Según la teoría, tenemos:

I. Falso

- Toda recta que no sea vertical es gráfica de una función.

II. Falso

- Una función sobreyectiva no necesariamente es inyectiva.

III. Falso

- La regla dada corresponde al teorema de unicidad para la existencia de función.

Rpta.: F F F

Pregunta 13

Indica la alternativa correcta después de determinar si dicha proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. $\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k}=100$

II. El módulo del número complejo

$w=\frac{(1,2)(3,4)}{(2,1)}$ es 5.

III. La suma de los números complejos que satisfacen la ecuación:

$(x+1)^2+2i=4+(3+y)i$ es $(-2;-2)$

A) V V V
B) F V F
C) F F V
D) F V V
E) F F F

Resolución 13

Números complejos

Cantidades imaginarias

I. $\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k}=\sum_{k=0}^{100}1^k=101$ .... (F)

II. $|W|=\frac{\sqrt{5}.5}{\sqrt{5}}=5$ .... (V)

III. $(x+1)^2=4\rightarrow x_1=-3 \quad x_2=1$

$y+3=2\rightarrow y=-1$

Luego:

$Z_1=-3-i$

$Z_2=1-i$

$Z_1+Z_2=-2-2i=(-2,-2)$ .... (V)

Rpta.: F V V

Pregunta 14

Dado el conjunto solución $CS=\langle 0;a\rangle\cup\langle b;\infty\rangle$ de la inecuación $(\text{Ln}x-2)(x-1)>0$,

determina el valor de $E=\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$

A) 1
B) e
C) 2
D) e^2
E) 3

Resolución 14

Logaritmos

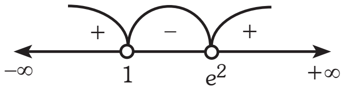
Inecuaciones logarítmicas

Si $(\ln x-2)(x-1)>0$

i. Aplicando la regla de signos

$\ln x-2=0$; $x-1=0$

$x=e^2$; $x=1$



$S_i = <-\infty;1> \cup <e^2;+\infty>$

ii. Condición de existencia del logaritmo:

$x>0 \rightarrow S_{ii} = <0;+\infty>$

$C.S. = S_i \cap S_{ii}$

$C.S. = <0;1> \cup <e^2;+\infty>$

Piden: $\text{Ln}\dfrac{b}{a} = \text{Ln}\left(\dfrac{e^2}{1}\right)$

$= 2$

Rpta.: 2

Pregunta 15

Sea A una matriz de orden 3×3 tal que A^3=-I, I matriz identidad. La adjunta de la matriz A^{10}, Adj(A^{10}), es igual a:

A) A
B) –A
C) $|A|A^{-1}$
D) $-|A|A^{-1}$
E) $-|A|A$

Resolución 15

Matrices

Matriz inversa

Dato : $A^3=-I \rightarrow A^{10}=-A$

Nos piden : $Adj(A^{10})=Adj(-A)$

Luego : $Adj(-A)=|-A|.(-A^{-1})$

También : $|A|=-1$

$\rightarrow Adj(-A)=-A^{-1}=(-1).A^{-1}$

Finalmente : $Adj(A^{10})=|A|A^{-1}$

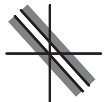
Rpta.: $|A|A^{-1}$

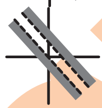
Pregunta 16

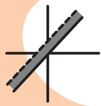
Identifica el gráfico que mejor representa al conjunto solución del sistema.

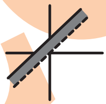
$x + y > 0$

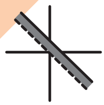
$-3x - 3y \geq -6$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Resolución 16

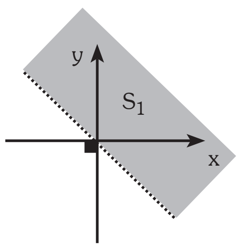
Gráficas de relaciones

Planos originados por rectas

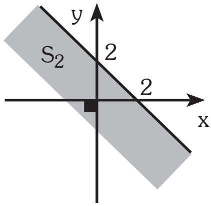
El sistema dado se puede reescribir así:

$$\begin{cases} y > -x \text{ .... (1)} \\ x + y \leq 2 \text{........ (2)} \end{cases}$$

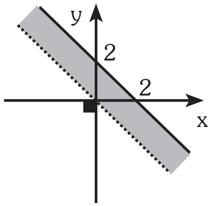
Graficando (1):



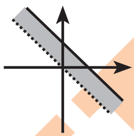
Graficando (2):



Finalmente la intersección de S_1 y S_2 será la solución del sistema.



Rpta.:



Pregunta 17

Dadas las siguientes proposiciones:

I. En un problema de programación lineal, el valor de la función objetivo es alcanzado en un vértice de la región admisible.

II. Si a la región admisible de un problema de programación lineal se le adiciona una nueva restricción de la forma $ax+by\leq c$, el valor óptimo de la función objetivo no varía.

III. Si (x^*, y^*) es la solución de un problema de maximización y z^* es el valor óptimo, se tiene entonces que $z^*\geq ax+by$ para todo (x,y) en la región admisible, ($ax+by$ es la función objetivo).

Son correctas:

A) Solo I

B) I y II

C) I y III

D) Solo III

E) I, II y III

Resolución 17

Programación lineal

Optimización

Según la teoría, tenemos:

I. Verdadero

- Teorema fundamental de la programación lineal.

II. Falso

- Si la restricción se ubica dentro de la región factible, el problema puede variar.

III. Verdadero

- Para este caso, el valor óptimo verifica la condición dada.

Rpta.: I y III

Pregunta 18

Señala la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposiciones es verdadera (V) o falsa (F):

I. Sea f una función polinomial y (x_n) una sucesión convergente. Entonces, la sucesión (y_n), donde $y_n= f(x_n)$, es convergente.

II. Para todo $x \in \langle -1;1\rangle$ se cumple

$$\sum_{K=0}^{\infty} x^K = \frac{1}{x-1}$$

III. Toda sucesión alternante es convergente.

A) V V F
B) V F V
C) V F F
D) F F F
E) F F V

Resolución 18

Series

Valor de convergencia

Según la teoría, tenemos:

I. Verdadero

- $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$; $a_0,a_1,a_2,$ $... \wedge a_n \in R$

$y_n=f(x_n) \rightarrow \text{Lim } y_n=\text{límf}(x_n)$

$\text{Lim } y_n=f(\text{lim}(x_n))$

$\text{Lim } y_n=f(L)$

$\text{Lim } y_n=C \in R$

II. Falso

$S=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$ ¡Suma límite!

III. Falso

- Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente

Rpta.: V F F

Pregunta 19

Considera CS el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$\log \sqrt[4]{x} < \sqrt{\log x}$, con $x<10$

Determina el valor de M= card(CS∩Z), donde card denota la cardinalidad de un conjunto.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Resolución 19

Logaritmos

Inecuaciones logarítmicas

Se tiene $\text{Log}\sqrt[4]{x} < \sqrt{\text{Logx}}$; $x<10$

(*) $x>0 \wedge \text{Log } x>0$

$x>1$

De la inecuación: $\frac{1}{4}\text{Logx} < \sqrt{\text{Logx}}$

$x \in <1;10^{16}>$

Luego el CS:

$x \in <1;10> \rightarrow CS \cap Z=\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$

$M=\text{card}(CS \cap Z)=8$

Rpta.: 8

Pregunta 20

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$x+2Ky+z=4$

$x-y-z=-8$

$-x+y+Kz=6$

determina el o los valores de K para que el sistema tenga solución única.

A) $\mathbb{R} \setminus \left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

B) $\mathbb{R} \setminus \left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

C) $\mathbb{R} \setminus \{2;-1\}$

D) $\mathbb{R}-\{-2;1\}$

E) $1, \frac{1}{2}$

Resolución 20

Sistemas de ecuaciones

Cramer

Si el sistema presenta solución única ($\Delta_s \neq 0$)

$$\triangle_s = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

Aplicando el método de la estrella:

$(-k+2k+1) - (1+2k^2-1) \neq 0$

$2k^2-k-1 \neq 0$

$(2k+1)(k-1) \neq 0$

$\therefore\ k \in R \setminus \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

Rpta.: $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

Pregunta 21

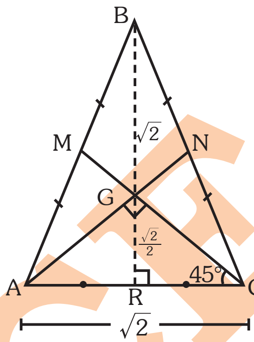
La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$ m. Si las medianas relativas a los lados congruentes se cortan perpendicularmente, entonces determina el área del triángulo (en m^2)

A) 1
B) 1.5
C) 2
D) 2.5
E) 3

Resolución 21

Áreas

Áreas de regiones triangulares



Piden: $A_{\blacktriangle ABC}$

G→ baricentro

$\triangle$ AGC: $GR = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BG = 2GR = \sqrt{2}$

$$\therefore\ A_{\blacktriangle ABC} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow A_{\blacktriangle ABC} = 1.5$$

Rpta.: 1,5

Pregunta 22

Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, con centros A, B y C respectivamente, donde AB= 5 cm, AC= 7 cm y BC= 8 cm. Si $M \in \overline{BC}$ es un punto común de tangencia entre dos circunferencias, determina AM en cm.

A) $\sqrt{16}$

B) $\sqrt{17}$

C) $\sqrt{18}$

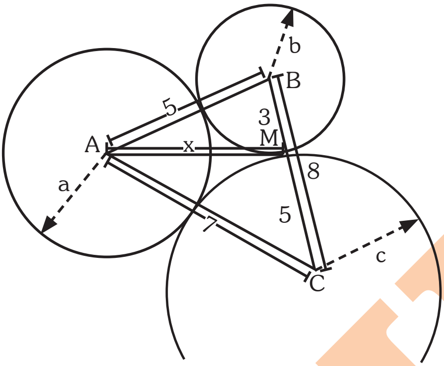
D) $\sqrt{19}$

E) $\sqrt{20}$

Resolución 22

Relaciones métricas

T. Stewart



Piden "x"

$a+b=5 \qquad a=2$

$b+c=8 \qquad b=3$

$a+c=7 \qquad c=5$

T. Stewart:

$5^2.5+7^2\times 3=x^2.8+3.5.8$

$\therefore x=\sqrt{19}$

Rpta.: $\sqrt{19}$

Pregunta 23

Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ dos rectas que se cruzan. $\overleftrightarrow{L_3}$ es una recta contenida en el mismo plano de $\overleftrightarrow{L_2}$ tal que $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ y $R=\overleftrightarrow{L_2} \cap \overleftrightarrow{L_3}$. El triángulo RQP ($P\in \overleftrightarrow{L_1}$) es recto en $Q\in \overleftrightarrow{L_2}$. Si QRT ($T\in \overleftrightarrow{L_3}$) es un triángulo isósceles con QT= 6u y PR= 3RT, determina la distancia (en u) entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

A) $3\sqrt{2}$

B) $6\sqrt{2}$

C) $8\sqrt{2}$

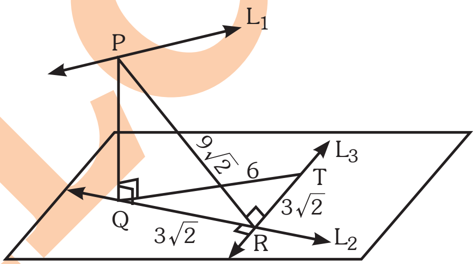
D) 12

E) 13

Resolución 23

G. Espacio

Rectas y plano



$\triangle$ QRT NOTABLE

$QP = RT = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow PR = 9\sqrt{2}$

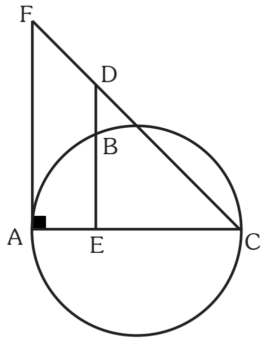
$\triangle$ PQR: $PQ^2=(9\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2$

$\therefore PQ=12$

Rpta.: 12

Pregunta 24

En la figura, si $\overline{AF}//\overline{DE}$, AF= 11 cm, BD= 3 cm, BE= 4 cm y AC= $\frac{22}{7}\sqrt{7}$ cm, entonces $\frac{AB}{BC}$ es:



A) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

C) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

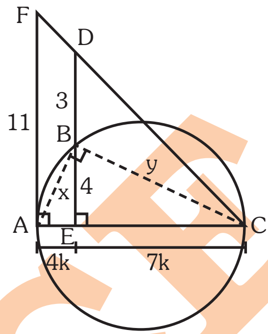
D) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

E) $\frac{4}{\sqrt{7}}$

Resolución 24

Relaciones métricas

RM en el triángulo rectángulo



Se pide: $\frac{x}{y}=?$

$\triangle$ FAC ~ $\triangle$ DEC

$$\frac{AC}{EC}=\frac{11}{7}$$

$\triangle$ ABC: $\left.\begin{aligned} x^2 &= (11k).4k \\ y^2 &= (11k).7k \end{aligned}\right\}\div$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

Rpta.: $\frac{2}{\sqrt{7}}$

Pregunta 25

Una recta corta perpendicularmente a dos planos paralelos en los puntos A y B. Otra recta corta a dichos planos en C y B. Determina el área (u^2) del triángulo ABC, si se sabe que la distancia entre los planos es 12u y BC= 13u.

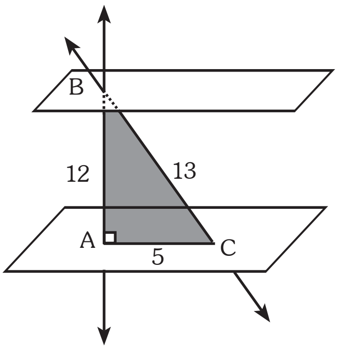
A) 24
B) 26
C) 30
D) 32
E) 36

Resolución 25

Geometría del espacio

Planos y rectas

Piden: S_{ABC}



Por Pitágoras

$(AC)^2 = 13^2 - 12^2$

$AC = 5$

$$S_{ABC} = \frac{5x12}{2}$$

$S_{ABC} = 30$

Rpta.: 30

Pregunta 26

ABCDEFGH es un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $R=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Si AF=b y AC=a, entonces $\dfrac{2b\sqrt{2+\sqrt{2}}-a\sqrt{2}}{ab}$ es igual a:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

D) 2

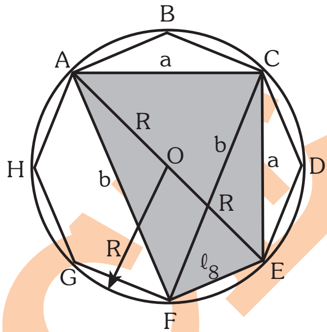
E) 3

Resolución 26

Polígonos regulares

PTolomeo

Dato: $R=\sqrt{2+\sqrt{2}}$



Pide: $M=\dfrac{(2R)b-a\sqrt{2}}{ab}$

$P_{Tolomeo}$: ▱ACEF

$ab+a\ell_8=(2R)b$

Obs: $\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\ell_8=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\ell_8=\sqrt{2} \Rightarrow$ Reemplazando

$*ab+a(\sqrt{2})=(2R)b$

$\therefore\ M=\dfrac{ab+a\sqrt{2}-a\sqrt{2}}{ab}=1$

Rpta.: 1

Pregunta 27

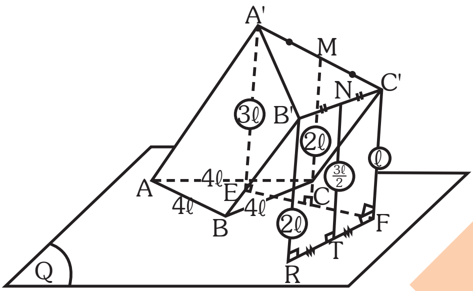
Se tiene un tronco de pirámide triangular cuyas bases son ABC y A'B'C', siendo ABC un triángulo equilátero de lado 4ℓcm. M y N son los puntos medios de $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'C'}$ respectivamente. Si las distancias de los puntos M, C' y N al plano de la base ABC son 2ℓcm, ℓcm y $\frac{3}{2}$ℓcm, respectivamente, halla el volumen (en cm^3) del tronco de pirámide.

A) $4\ell^3\sqrt{3}$
B) $5\ell^3\sqrt{3}$
C) $6\ell^3\sqrt{3}$
D) $7\ell^3\sqrt{3}$
E) $8\ell^3\sqrt{3}$

Resolución 27

Tronco de Prisma

Nota: En el problema debe decir tronco de prisma



Piden: $V_{\text{tronco prisma}}$
trapecio A'C'FE: A'E=3ℓ
trapecio B'C'FR: B'R=2ℓ

$$V_{\substack{\text{Tronco}\\\text{prisma}}}=\Delta_{\text{BASE}}\frac{(3\ell+\ell+2\ell)}{3}$$

$$V_{\substack{\text{Tronco}\\\text{prisma}}}=\frac{(4\ell)^2\sqrt{3}}{4}(2\ell)$$

$$V_{\substack{\text{Tronco}\\\text{prisma}}}=8\ell^3\sqrt{3}$$

Rpta.: $8\ell^3\sqrt{3}$

Pregunta 28

Se tiene un cilindro oblicuo con diámetro de la base AB= 10 cm y generatriz $\overline{CB}$. Se prolonga $\overline{AB}$ hasta el punto D de tal forma que CD= 12 cm. M es punto medio de $\overline{BC}$, m∢BCD= α y la m∢BDM= 90°−m∢BCD. Si α<m∢CBD, halla el volumen del cilindro (en cm^3).

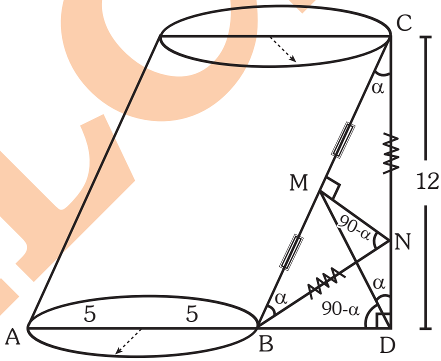
A) 200 π
B) 250 π
C) 300 π
D) 350 π
E) 400 π

Resolución 28

Geometría del espacio

Cilindro

Piden: $V_{CIL.}$=?



Trazamos $\overline{MN}\perp\overline{BC}$
⏢BMND Inscriptible
m∢NDB=90°
∴ $V_{CIL.}=\pi(5)^2(12)$

$$\boxed{V_{CIL.}=300\pi}$$

Rpta.: 300π

Pregunta 29

Si una esfera de radio r cm se inscribe en un cono recto equilátero cuyo radio de la base mide R cm, entonces la razón entre dichos volúmenes, respectivamente, es:

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{1}{3}$

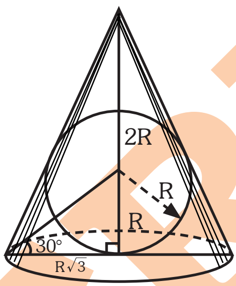
D) $\frac{2}{9}$

E) $\frac{1}{9}$

Resolución 29

Cono y esfera

Piden: $\frac{V_{esf}}{V_{cono}}$



$$\frac{V_{esf}}{V_{cono}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi (R\sqrt{3})^2(3R)}$$

$$\therefore \frac{V_{esf}}{V_{cono}} = \frac{4}{9}$$

Rpta.: $\frac{4}{9}$

Pregunta 30

Se tiene un tetraedro regular ABCD. Si la distancia del centro de la cara ABC a la altura del tetraedro trazada desde el vértice B es d, determina el volumen del tetraedro.

A) $\frac{(2+\sqrt{3})}{16}d^3$

B) $\frac{(25\sqrt{5})}{4}d^3$

C) $\frac{27}{4}\sqrt{6}\,d^3$

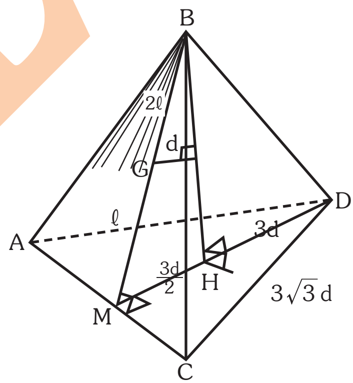
D) $\frac{27\sqrt{7}}{14}d^3$

E) $\frac{27}{24}\sqrt{8}\,d^3$

Resolución 30

Geometría del espacio

Poliedros regulares



Piden: $V_{tetraedro}$

$* MH = \frac{3d}{2}$

$*$ H: baricentro del $\triangle$ ACD

$\hookrightarrow HD = 3d$

$\hookrightarrow CD = 3\sqrt{3}\,d$

$\therefore V_{tetraedro} = \frac{(3\sqrt{3}\,d)^3\sqrt{2}}{12}$

$\therefore V_{tetraedro} = \frac{27}{4}\sqrt{6}\,d^3$

Rpta.: $\frac{27}{4}\sqrt{6}\,d^3$

Pregunta 31

Determina el volumen generado por el segmento que une los puntos (0,0) y (3,4), al ser rotado en torno de la recta diagonal del primer cuadrante del plano.

A) $\frac{7\pi}{6}$

B) $\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$

C) $\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$

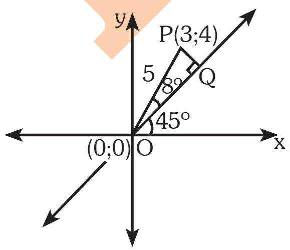
D) $\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}$

E) $\frac{7\pi}{2\sqrt{3}}$

Resolución 31

Geometría del espacio

Cono



Piden: Vsol

$*$◺QPO (Notable: 8° y 82°)

$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$OQ = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$* Vsol = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{7\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{3}$

$\therefore Vsol = \frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$

Rpta.: $\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$

Pregunta 32

Se tienen dos planos, P y Q, perpendiculares entre sí, y se cortan según una recta L. La recta que une un punto A de P con un punto B de Q forma con P un ángulo de 30° y con Q de 45°. Calcula la medida de $\overline{AB}$ si la distancia mínima entre la recta L y $\overline{AB}$ es $4\left(\sqrt{3}-1\right)$cm.

A) 4 cm

B) 6 cm

C) 8 cm

D) 10 cm

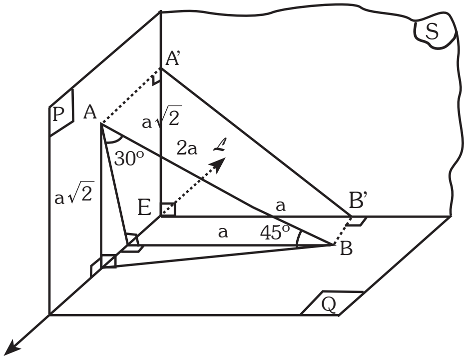
E) 12 cm

Resolución 32

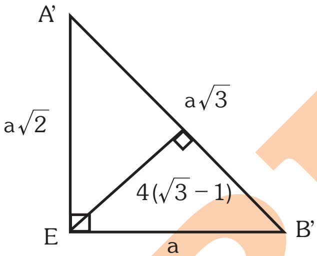
Geometría del espacio

Rectas y planos

Piden:



En el plano "S"



- RMTR: $a.a\sqrt{2} = a\sqrt{3}.4(\sqrt{3}-1)$

  $2a = 4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

  $\therefore\ 2a = 7{,}172$

Rpta.: La respuesta es 7,172 no se encuentra clave en el problema

Pregunta 33

Dada la parábola P: $y=x^2$ y la recta L: $x–2y= 10$, halla la distancia (distancia mínima) entre ellas.

A) $\dfrac{79\sqrt{5}}{40}$

B) $\dfrac{80\sqrt{5}}{39}$

C) $\dfrac{79\sqrt{5}}{39}$

D) $\dfrac{81\sqrt{5}}{39}$

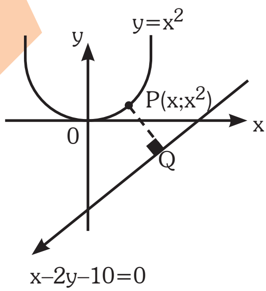
E) $\dfrac{81\sqrt{5}}{40}$

Resolución 33

Secciones cónicas

Parabola

Graficando:



Distancia de un punto a la recta:

$$PQ = \frac{|x-2x^2-10|}{\sqrt{5}}$$

$$PQ = \frac{|2(x^2-\frac{x}{2})+10|}{\sqrt{5}}$$

Completando cuadrados

$$PQ = \frac{|2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{79}{8}|}{\sqrt{5}}$$

Como PQ es mínimo

$$PQ=\frac{\left|0+\frac{79}{8}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$PQ=\frac{79\sqrt{5}}{40}$$

Rpta.: $\frac{79\sqrt{5}}{40}$

Pregunta 34

Si se cumple que:

$$a.\cos^4x+b.\mathrm{sen}^4x=\frac{ab}{a+b}$$

Calcula el valor de Tg^2x.

A) $\frac{a+1}{b}$

B) $\frac{b+1}{a}$

C) $\frac{b}{a}$

D) $\frac{a}{b}$

E) $\frac{ab+1}{ab}$

Resolución 34

Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas auxiliares

Del dato:

$$\frac{a(a+b)}{ab}\cos^4x+\frac{b(a+b)}{ab}\mathrm{sen}^4x=1$$

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)\cos^4x+\left(1+\frac{b}{a}\right)\mathrm{sen}^4x=1$$

$$\frac{a}{b}\cos^4x+\cos^4x+\mathrm{sen}^4x+\frac{b}{a}\mathrm{sen}^4x=1$$

$$\underbrace{\frac{a}{b}\cos^4x-2\mathrm{sen}^2x\cos^2x+\frac{b}{a}\mathrm{sen}^4x}=0$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x-\sqrt{\frac{b}{a}}\mathrm{sen}^2x\right)^2=0$$

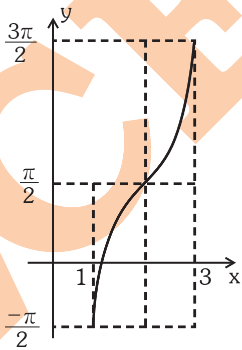
$$\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x=\sqrt{\frac{b}{a}}\mathrm{sen}^2x$$

$$\mathrm{tg}^2x=\frac{a}{b}$$

Rpta.: $\frac{a}{b}$

Pregunta 35

Sea la función $y=A.\mathrm{arc\,sen}(Bx+C)+D$ $(A,B>0)$, con gráfica



Calcula $K=A+B+C\left(\frac{4D}{\pi}\right)$

A) –2

B) –1

C) 0

D) 2

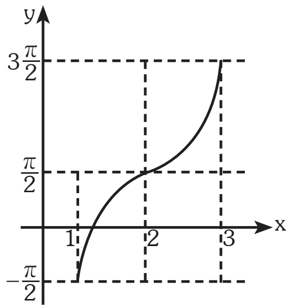
E) 4

Resolución 35

Funciones inversas

Graficas

y=AarcSen(Bx+C)+D



I. $Bx+C\in[-1;1]\rightarrow x\in\left[\frac{-1-C}{B};\frac{1-C}{B}\right]$ del gráfico $x\in[1;3]$

$\rightarrow\frac{-1-C}{B}=1\rightarrow \underline{B+C=-1}|;\ \frac{1-C}{B}=3\rightarrow \underline{3B+C=1}|$

por lo tanto B=1; C=-2

II. $\text{arcSen}(Bx+C)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$y\in\left[-\frac{\pi}{2}A+D;\frac{\pi}{2}A+D\right]$

del gráfico $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

$\rightarrow-\frac{\pi}{2}A+D=-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}A+D=\frac{3\pi}{2}$ por lo tanto:

A=2; $D=\frac{\pi}{2}$

III. Piden: $K=A+B+C\left(\frac{4D}{\pi}\right)$ reemplazando k=-1

Rpta.: -1

Pregunta 36

Determina el dominio de la función con regla de correspondencia:

$$f(x)=\sqrt[4]{2\sec^2x-tg^4x-3}-4$$

A) $\left\{\frac{n\pi}{4}/\ n\in Z\right\}$

B) $\left\{\frac{2n+1}{4}\pi/\ n\in Z\right\}$

C) $\left\{\frac{n\pi}{2}/\ n\in Z\right\}$

D) $\{n\pi/n\in Z\}$

E) $\{2n\pi/n\in Z\}$

Resolución 36

Funciones trigonométricas

Dominio de una función

$$f(x)=\sqrt[4]{2\sec^2x-tg^4x-3}-4$$

I. $\cos x\neq 0\rightarrow x\neq(2n+1)\pi/2$

II. $2\sec^2x-tg^4x-3\geq 0\rightarrow$

$2(1+tg^2x)-tg^4x-3\geq 0;$

$tg^4x-2tg^2x+1\leq 0$

$(tg^2x-1)^2\leq 0\rightarrow tg^2x-1=0\rightarrow$

$tg^2x=1\rightarrow tgx\pm 1$

$Df=\left\{\frac{(2n+1)\pi}{4}/n\in Z\right\}$

Rpta.: $\left\{\frac{2n+1}{4}\pi/n\in Z\right\}$

Pregunta 37

Si para $\phi\in[0,2\pi]$ se tiene

$\text{sen}\phi+\cos\phi+\text{sen}2\phi=[\text{sen}\phi+\cos\phi+A]^2+B$, entonces (2A+4B) es igual a:

A) –1

B) –2

C) –3

D) –4

E) –5

Resolución 37

Identidades trigonométricas del ángulo doble

Identidades trigonométricas

$\text{sen}\phi+\cos\phi+2\text{sen}\phi\cos\phi=[\text{sen}\phi+\cos\phi+A]^2+B$

$\text{sen}\phi+\cos\phi+\underbrace{2\text{sen}\phi\cos\phi+1}-1=\ldots$

$(\text{sen}\phi+\cos\phi)+(\text{sen}\phi+\cos\phi)^2-1=\ldots$

Completando cuadrados:

$$\left[\text{sen}\phi+\cos\phi+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}=\left[\text{sen}\phi+\cos\phi+A\right]^2+B$$

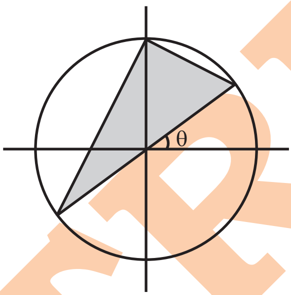
Piden:

$$2A+4B=2\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{-5}{4}\right)=-4$$

Rpta.: -4

Pregunta 38

En el círculo trigonométrico de la figura, determina el área del triángulo sombreado.



A) cosθ
B) secθ
C) tgθ
D) senθ
E) cscθ

Resolución 38

Circunferencia trigonométrica

Áreas

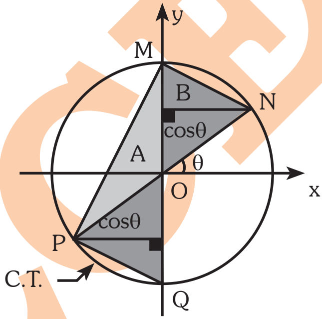
Del gráfico: ΔOMN ≅ ΔOPQ

∴ Sus superficies son iguales

Piden A+B = Área ΔMPQ

$$A+B=\frac{2(\cos\theta)}{2}$$

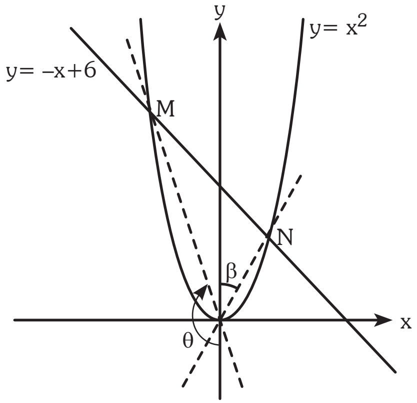
A+B=cosθ



Rpta.: cosθ

Pregunta 39

En el gráfico mostrado, M y N son los puntos de intersección entre las gráficas de $y= x^2$ e $y=-x+6$. Calcula $E= 2\ tg\beta+3tg\theta$.



A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución 39

Reducción al IC

R. T. C. M.

Para determinar los puntos M y N resolvemos el sistema de ecuaciones de: $y=x^2$ e $y = -x + 6$

$\rightarrow x^2 = - x + 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2)=0$

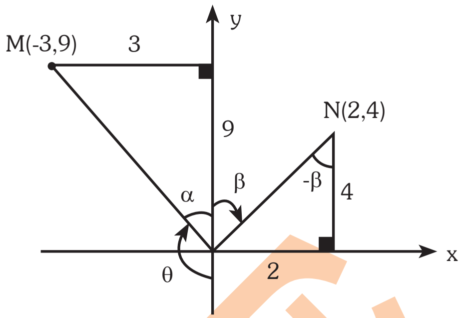
$x= -3 \wedge x=2$

De lo cual

$y = 9 \wedge y = 4$

$\therefore M(-3, 9) \wedge N (2,4)$

En el gráfico



Por reducción al IC

- $\alpha - \theta = 180°$

  $\alpha = 180° + \theta$

  $tg\alpha = tg(180° + \theta)$

  $tg\alpha = tg\theta$

  $\therefore tg\theta = \dfrac{3}{9}$

- $tg(-\beta) = \dfrac{2}{4}$

  $\therefore tg\beta = -\dfrac{2}{4}$

Calculamos

$E= 2\tan\beta + 3\tan\theta$

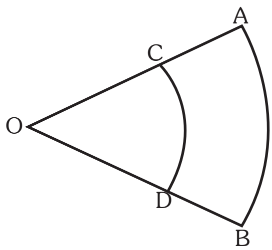
$E = 2\left(\dfrac{-2}{4}\right) + 3\left(\dfrac{3}{9}\right)$

$E= 0$

Rpta.: 0

Pregunta 40

De la figura, AOB y COD son sectores circulares. Si las áreas de las regiones COD y CABD son S y 3S u^2, respectivamente, y $L_{\overset{\frown}{AB}} = 4u$, determina la medida del lado OC en función de S.



A) S
B) 2S
C) 3S
D) 4S
E) 5S

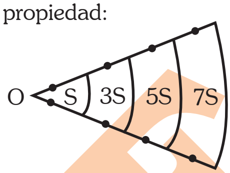
Resolución 40

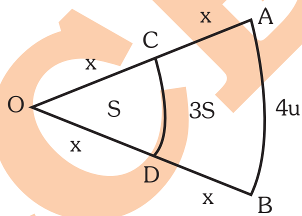
Sector circular

Superficie de un sector

Por las condiciones indicadas:

propiedad:





Sector AOB

$$4\,S = \frac{1}{2}(2x)(4) \rightarrow S = x$$

Rpta.: S